مقدمه:

منظور از این درس ارائه قسمتهای از ریاضیات پیشرفته به دانشجویان مهندسی است کـه از دیـدگاه نوین در رابطه با مسائل علمی از اهمیت بیشتری برخوردارند. مطالب به تناسب فراوانی کاربردشـان انتخاب شده اند. اصولیکه در انتخاب موضوعها مورد نظر قرار گرفته اند:

1) اهمیت ریاضیات در علوم مهندسی روز به روز بیشتر شده و قابل پیش بینی است که در آینده نیز این اهمیت افزایش یابد. واقعیت آن است که امروزه مسائل مهندسی به اندازه ای پیچیده اند که بیشتر آنها را نمی توان صرفا" با استفاده از شهود فیزیکی و تجارب گذشته حل کرده رهیافت تجربی درحل بسیاری از مسائل در گذشته موفق بوده است، اما به محض اینکه سـرعتهای بـالا، نیروهـای بـزرگ، دماهای بالا یا سایر شرایط غیر عادی وارد مسئله می شـوند بـا شکست رو بـه رو مـی شـود. ایـن وضعیت به این دلیل که مواد جدید (نظیر پلاستیک ها، آلیاژها و غیـره) خـواص فیزیکـی غیـر عـادی دارند حادتر میشود. امروزه کارهای آزمایشی پیچیده، وقت گیر و پر هزینه شده انـد. در ایـن زمینـه ریاضیات در برنامه ریزی آزمایشها، بررسی داده های آزمایشی، و تقلیل کار و هزینۀ یـافتن جـواب کمک می کند.

2) آن دسته از روشهای ریاضی که به دلایـل نظری محـض توسـعه یافتـه بودنـد ناگهـان از اهمیـت زیادی در ریاضیات مهندسی برخـوردار شـدند. بـرای مثـال مـی تـوان از نظریـه ماتریـسها، نظریـۀ معادلات دیفرانسیلی که جوابهای تناوبی دارند نام برد.

تجزیه و تحلیل سیستم ها با سه مرحله زیر عملی می گردد.

مدل کردن Modeling

↓

حل کردن Solving

↓

تفسیر کردن Interpreting

سـه مرحلـه فـوق بـا بکـارگیری نـرم افزارهـای آموزشـی ریاضـی نظیـر Maple ،Mathematica، Macsyma ،Reduce ،Matlab به لحاظ قابلیت سمبولیک آنان امکان پذیر می باشد.

فصل 1

ماتریسها

1-1 ماتریسها:

1. تعریف ماتریس
2. دترمینان- معکوس ماتریس
3. محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

1-1-1 تعریف ماتریس

همانطوریکه می دانیم جدولی از اعداد یا اعداد مختلط و یا توابع بصورت زیر را یک مـاتریس گوینـد. (این عناصر a_{ij} میتوانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند و یا توابع)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{m سطر n ستون} \qquad (1\text{-}1)$$

1-1-2 عملیات جبری روی ماتریسها

اگر دو ماتریس A, B هم بعد باشند (تعداد سطرها- ستونها این دو ماتریس با هم برابر باشند) در آن صورت

$$A\mp B=\lfloor a_{ij}\mp b_{ij}\rfloor_{m*n} \qquad (1\text{-}2)$$

1-1-3 تعریف برابری

دو ماتریس A ،m*n و Bرا برابر گویند هرگاه

$a_{ij}=b_{ij}$ for each i and j (1-3)

1-1-4 ضرب اسکالر یک ماتریس

هر گاه k عدد حقیقی باشد، آنگاه ضرب اسکالر در ماتریس برابر

$$kA=\lfloor ka_{ij}\rfloor_{m*n} \qquad (1\text{-}4)$$

1-1-5 ضرب ماتریسها:

اگر دو ماتریس A=(m*n) , B=n*l باشند آنگاه ضرب دو ماتریس برابر

$$A.B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{mxl} \qquad i=1\ .\ .\ .\ .\ m,\ j=1\ .\ .\ .\ l \qquad (1\text{-}5)$$

1-1-6 ترانسپوزه

ترانسپوز یک ماتریس A_{m*n} برابر ماتریس $A^T{}_{n*m}$ میباشد.

قضایای ترانسپوز:

$$\begin{aligned}
&i)(A^T)^T = A,\\
&ii)(A+B)^T = A^T + B^T \textit{Transpose of a sum}\\
&v)(ABC)^T = C^T B^T A^T\\
&iii)(AB)^T = B^T A^T \textit{Transpose of a product}
\end{aligned} \qquad (1\text{-}6)$$

1-1-7 دترمینان ماتریس مربعی 3*3

دترمینان یک ماتریس $[A]_{3*3}$ برابر

$$\det A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1\text{-}7)$$

حاصل دترمینان بالا به شکل زیر نیز می تواند آرایش داده شود.

$$\det\ A = a_{11}\ C_{11} + a_{12}\ C_{12} + a_{13}\ C_{13} \qquad (1\text{–}8)$$

که در آن

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(دترمینان ماتریس 2*2 که از دو طرف سطر i ام و ستون j ام بدست می آید.)

لذا ً کوفاکتور ماتریس 3*3 را برای عنصر a_{ij} بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\text{Cofactor}\ (a_{ij}) = C_{ij} = (-1)^{i+j} \qquad (1\text{–}9)$$

بنابراین یک ماتریس (3*3) دارای 9 کوفاکتور می باشد.
برای ماتریس (4*4) نتیجتاً می توانیم کوفاکتور تعریف نماییم. کوفاکتور ماتریس (4*4) در حقیقت دترمینان ماتریس (3*3) خواهد بود بنابراین برای یک ماتریس 4*4 دارای 16 کوفاکتور خواهیم بود. اگر یک سطر یا ستون را بطور دلخواه انتخاب کنیم. عناصر آن سطر یا ستون را در کوفاکتورهای نظیرش ضرب و جمع نماییم دترمینان یک ماتریس (4*4) بدست می آید.

$$\det\ A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + a_{i3} C_{i3} + a_{i4} C_{i4} \qquad i = 1, ..., 4$$

$$\det\ A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + a_{3j} C_{3j} + a_{4j} C_{4j}$$

نتیجتاً بطور عمومی می توانیم یک ماتریس (n*n) کوفاکتورهای یک ماتریس را تعریف کنیم. بنابراین یک ماتریس (n*n) دارای n^2 کوفاکتور خواهد بود. آن وقت جهت محاسبه دترمینان A یک سطر یا یک ستون را بطور دلخواه انتخاب کرده عناصر آن سطر یا ستون را در کوفاکتورهای نظیر ضرب کرده یا جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} \det\ A &= a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + ... + a_{in}\ C_{in} \qquad i = 1, 2, ..., n \\ \det\ A &= a_{1j}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + ... + a_{nj}\ C_{nj} \qquad j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \qquad (1\text{–}10)$$

تمرین 1-1: فرض کنید قاب مختصات متحرک m حول محور f1 قاب مختصات ثابت F به اندازه ϕ_1 در جهت راست بچرخد.

الف) دوران حول اولین بردار واحد را بدست آورید.

ب) دوران حول دومین و سومین بردار واحد قاب مختصات ثابت F را بدست آورید.

ج) ترکیب سه دوران را با استفاده از Mathematica بدست آورید.

د) نشان دهید که $R^{-1} = R^T$

تمـرین 2-1: دترمینـان مـاتریس زیـر را بدسـت آوریـد و بـا جـواب مقایسـه کنیـد. (از نـرم افـزار Mathematica استفاده کنید.)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \det A=34$$

تمرین 3-1: مقداری برای λ پیدا کنید که معادلات زیر را برآورده کند.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

تمرین فوق را با Mathematica حل نمایید.

تمرین 4-1 : صفحه مربعی نشان داده شده در شکل1-1 را در نظر بگیرید، دما در هر گوشه آن مشخص شده است

لف) مقدار دقیق دماهای u_1, u_2, u_3, u_4 را در نقاط p_1, p_2, p_3, p_4 بیابید

ب) به شکل ماتریسی نشان دهید AU=B

ج) سیستم قسمت الف را با استفاده از یافتن ماتریسcoefficient حل کنید.

8-1-1 خواص دترمینان ها:

1) اگر A^T ترانسپوز ماتریس A باشد آنگاه $\det A^T= \det A$

2) هرگاه دو سطر (یا ستون) ماتریس A برابر و یا معادل باشند آنگاه $\det A= 0$

3) هرگاه تمام المانهای یک سطر یا ستون برابر صفر باشد آنگاه $\det A= 0$

4) اگر B ماتریسی باشد که از جابجایی دو سطر یا ستون ماتریس A بدست آیند آنگاه
$\det B= -\det A$

5) فرض کنید B ماتریسی باشد که از ضرب ماتریس A در یک عدد حقیقی غیر صفر k در یک سطر یا ستون آن آنگاه $\det B= k.\det A$

6) هرگاه A, B دو ماتریس n*n باشند آنگاه $\det AB= \det A \det B$

7) فرض کنید A یک ماتریس مثلثی n*n (بالا یا پایین) باشد آنگاه $\det A=a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$

1-1-9 معکوس ماتریس:

اگر A یک ماتریس n*n باشد و non-singular و $\det A \neq 0$ باشد، آنگاه

$$A^{-1} = (\frac{1}{\det A})\ adj\ A \qquad (1-11)$$

برای ماتریس 3*3 داریم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \Rightarrow C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

در هر صورت با بدست آوردن معکوس یک ماتریس یک دستگاه n معادله و n مجهول را می توانیم حل کنیم. بعبارت دیگر یک دستگاه n معادله و n مجهول

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\quad \dots\dots\quad \dots\dots\quad \dots\dots\quad \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \Rightarrow Ax = B \Rightarrow x = A^{-1}B \qquad (1-12)$$

از این معادله نتیجه میگیریم شرط وجود جواب آن است که A^{-1} موجود باشد، برای آنکه A^{-1} موجود باشد می بایستی $\det A \neq 0$ باشد که این شرط یک شرط لازم و کافی است.

1-1-10 مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

از لحاظ کاربردهای مهندسی، مسائل مقدار (تنش، کرنش و ممان اینرسی و ارتعاشات و قطری کردن) ویژه از جمله مهمترین مسائل مربوط به ماتریسها هستند.

فرض کنید $A=(a_{jk})$ یک ماتریس مربعی n سطر می باشد و معادلهٔ برداری

$$Ax = \lambda x \qquad (1-13)$$

را، که در آن λ یک عدد اسکالر است، در نظر بگیرید. مقداری از λ را که به ازای آن (1-13) دارای جوابی مانند $x \neq 0$ باشد مقدار ویژه یا مقدار مشخصه ماتریس A می گویند و بردار x بردار ویژه A متناظر با این مقدار ویژه می باشد.

مثال 1-1: دستگاه مرتعش: با نوشتن معادلات دینامیکی برای یک سیم مرتعش، اگر y را جابجایی عمودی یک نقطه از سیم در نظر بگیریم دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -3y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ \ddot{y}_2 = -2(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

که در آن $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

برای حل این معادله $y = x\,e^{wt}$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 Xe^{wt} = Axe^{wt} \Rightarrow Ax = \lambda x \qquad (\lambda = w^2)$$

مثال 1-2: تبدیل خطی: تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید: $y = Ax$

می خواهیم برداری مانند X را به قسمی پیدا کنیم که $y = AX = \lambda X$

می توان نشان داد که هر ماتریس مربعی n سطری حداقل یک و حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد.

طبق تعریف بردارهای خاص ماتریس A_{n*n} برداری است مانند V بطوریکه داشته باشیم

$$AV = \lambda V$$

مقدار خاص　　بردار خاص

همانطوریکه از رابطه بالا مشاهده میگردد، اگر مختصات بردار V را $V = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ بنامیم از رابطه فوق نتیجه می گردد که:

$$(A - \lambda I)V = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (1-14)$$

همانطوریکه مشاهده می گردد یک دستگاه n معادله و n مجهولی که طرف دوم صفر است دارا می‌باشیم، که اگر بخواهیم جواب این دستگاه معادلات را بدست آوریم خواهیم داشت:

که در این خود نتیجه می دهد اگر بخواهیم برای X جواب غیر از صفر بدست آوریم میبایستی

$$\det(A-\lambda I)=0$$

از این رابطه یک چند جمله‌ای بدست خواهیم آورد که آن را چندجمله‌ای مشخصه می نامیم.

$$P_n(\lambda)=\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+\ldots+P_n=\det\,(A-\lambda I) \qquad (1\text{–}15)$$

اگر $P_n(\lambda)$ دارای n ریشه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشد، متناظر با هر یک از λ_i, υ_i بردار خاص بدست می آوریم. بطوریکه

$$A\upsilon_i=\lambda_i\upsilon_i$$

قبل از آنکه روشهای بدست آوردن λ_i, υ_i ارائه دهیم به مثال زیر توجه می کنیم.

مثال3–1: مطلوبست محاسبه چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر خاص و بردارهای خاص

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix} \quad \Rightarrow P_2(\lambda)=\det\,(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&1\\3&4-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^2-6\lambda+5=0. \quad \Rightarrow \quad \lambda_2=5, \quad \lambda_1=1$$ مقادیر خاص

برای مقدار ویژه λ_1 داریم:

$$V=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow AV_1=\lambda_1V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2x+y=x\\3x+4y=y\end{matrix} \Rightarrow V_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

حل دستگاه بی نهایت جواب دارد. برای داشتن یک جواب خاص V را نرمالیزه می کنیم تا V_1 بدست آید. برای مقدار ویژه λ_2 نیز خواهیم داشت:

$$AV_2=\lambda_2V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x\\5y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}3x-y=0\\3x-y=0\end{matrix} \Rightarrow \big|\, y=3x \Rightarrow V_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

ماتریس خاص $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{10}\\-1/\sqrt{2}&3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$ از کنار هم قرار دادن V_1 و V_2 بدست می‌آید.

در جبر خطی ثابت می گردد که با ماتریس P می‌توان A را قطری کرد؛ یعنی:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{bmatrix} \qquad ; \qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}$$

تمرین5–1 : مقادیر ویژه و بردار های ویژه زیر را بدست آورید و پاسخ را با جواب Mathematica مقایسه کنید

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&5&6\\0&0&-7\end{bmatrix}\quad \lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-7 \qquad \begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix},\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$$

$$k_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, k_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, k_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\4\end{bmatrix} \qquad k_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, k_2=\begin{bmatrix}-1\\i\\i\end{bmatrix}, k_3=\begin{bmatrix}-1\\-i\\-i\end{bmatrix}$$

1-1-11 حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی:

1) مقادیر ویژه حقیقی

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A یک سیستم همگن $X' = AX \quad (1)$
و $V_1, V_2, ..., V_n$ بردارهای ویژه آن میباشند. حل عمومی (1) از رابطه زیر پیدا میشود.

$$X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t} \qquad (1\text{-}16)$$

مثال 4-1: دستگاه روبرو را حل کنید:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

حل: در ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه A را پیدا می کنیم.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

برای $\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow A - \lambda_1 I \quad \text{is equivalent to} \quad \begin{cases}3\upsilon_1 + 3\upsilon_2 = 0\\ 2\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = 0\end{cases}$

بنابراین $\Rightarrow \quad \upsilon_1 = -\upsilon_2. \quad \text{We select} \quad \upsilon_2 = -1 \quad \Rightarrow V_1 = [1 \quad -1]^T$

برای $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \quad A - \lambda_2 I \quad \text{is equivalent to} \quad \begin{cases}-2\upsilon_1 + 3\upsilon_2 = 0\\ 2\upsilon_1 - 3\upsilon_2 = 0\end{cases}$

به این ترتیب $\upsilon_1 = 3\upsilon_2/2 \quad \Rightarrow if\ \upsilon_2 = 2 \quad \Rightarrow V_2 = [3 \quad 2]^T$

$$\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t},\ X_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}e^{4t}\Rightarrow X=C_1X_1+C_2X_2=C_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}+C_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{-t}+3c_2e^{4t}\\-c_1e^{-t}+2c_2e^{4t}\end{bmatrix}$$

تمرین6-1: مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس زیر ر با استفاده از نرم افزار Mathematica محاسبه کنید

$$\frac{dx}{dt}=-4x+y+z$$
$$\frac{dy}{dt}=x+5y-z$$
$$\frac{dz}{dt}=\quad y-3z$$

حل : $X=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{-3t}+c_2\begin{bmatrix}10\\-1\\1\end{bmatrix}e^{-4t}+c_3\begin{bmatrix}1\\8\\1\end{bmatrix}e^{5t}$

با استفاده از Mathematica و روش حذفی گاوس .

2) مقادیر ویژه موهومی

a) اگر $\lambda_1=\alpha+i\beta$ باشند. بردار ویژه V_1 نیز موهومی خواهند بود. حل چنین سیستم معادلات خطی $(X'=AX)$ برابر

$$X_1=V_1e^{\lambda_1 t},\ X_2=\bar{V}_1e^{\bar{\lambda}_1 t}\qquad (x'=Ax)\qquad (1\text{-}17)$$

مثال5-1: معادله دیفرانسیل خطی روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x-y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=5x+4y\end{cases}$$

حل :$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+29=0\Rightarrow\lambda_1=5+2i,\lambda_2=5-2i$

$$\lambda_1 = 5+2i \xrightarrow{(A-\lambda_1 I)V=0} (A-\lambda_1 I)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-2i)v_1 - v_2 = 0 \\ 5v_1 - (1+2i)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{For } v_1 = 1 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5-2i \xrightarrow{(A-\lambda_{12} I)V=0} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

در نتیجه $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \end{bmatrix}^T e^{(5+2i)t} \quad , x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \end{bmatrix}^T e^{(5-2i)t}$

الف) $\Rightarrow X = c_1\begin{bmatrix} 1 & 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}$ با استفاده از جمع آثار ملاحظه می گردد که مقادیر و بردارهای ویژه موهومی و مزدوج هم می باشند:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad , \quad V_2 = \bar{V}_1$$

بازنویسی $(I) \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{(5+2i)t} + c_2 e^{(5-2i)t} \\ y = c_1(1-2i)e^{(5+2i)t} + c_2(1+2i)e^{(5-2i)t} \end{cases}$

با بکار گیری فرمول اویلر: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix} e^{5t} + c_2\begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^{5t}$

ب) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ مقادیر ویژه ماتریس A در سیستم $x' = Ax$ باشد آنگاه حل چنین سیستم برابر

$$X_1 = (B_1 \cos\beta t - B_2 \sin\beta t)e^{\alpha t}$$

$$X_2 = (B_2 \cos\beta t + B_1 \sin\beta t)e^{\alpha t}$$

که در آن

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[V_1 + \bar{V}_1 \right] = \text{Re}(V_1) \quad ; \quad B_2 = \frac{1}{2}\left[-V_1 + \bar{V}_1 \right] = \text{Im}(V_1)$$

پروژه 1-1 :

الف) معادلات دیفرانسیلی سیستم را استخراج نموده و بصورت ماتریسی بازنویسی کنید.

$$m_1 x''_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2 x''_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

ب) نشان دهید که این سیستم می تواند بصورت $X'' = AX$ نوشته شود.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T, \qquad A = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

پ) اگر جوابی بصورت $X=Ve^{wt}$ برای سیستم فرض شود نشان دهید که $X^{''} = AX$ نتیجه می-دهد:

$$(A-\lambda I)\,V=0 \qquad where \qquad \lambda=\varpi^2$$

ت) نشان دهید با فرض $m_1=m_2=1,\ k_1=3,\ k_2=2$ جواب بفرم زیر است:

$$X=c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{it}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{-it}+c_3\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}e^{\sqrt{6}\,it}+c_4\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}e^{-\sqrt{6}\,it}$$

ث) نشان دهید که جواب قسمت (ت) می تواند به این صورت نیز نوشته شود:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cos t+b_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\sin t+b_3\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\cos\sqrt{6}t+b_4\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\sin\sqrt{6}t$$

ج) شرایط اولیه زیر را به سیستم اعمال کرده و جابجایی جرمهای m_1 و m_2 از موقعیت تعادل را پس از زمان t محاسبه نمایید.

$$x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,\ \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$$

چ) با استفاده از Mathematica :جواب های قسمت های الف ب پ ت ث ج را کنترل کنید.

شکل x_1, x_2 مربوط به بند (ج) را برای t=0-10 رسم کنید.

از Mathematica برای متحرک نشان دادن سیستم (انیمیشن) استفاده کنید.

1-1-12 قطری کردن یک ماتریس

برای یک ماتریس $A_{(n*n)}$، ماتریس P (nonsingular) را می توان پیدا کرد که حاصل $P^{-1}AP=D$ یک ماتریس قطری گردد. در حالت کلی ضرب دو ماتریس n*n را میتوان به شکل زیر تعریف کرد.

$$AB=A[X_1X_2.....X_n]=[AX_1AX_2......AX_n] \qquad (1-18)$$

که در آن $X_n....X_2, X_1$ ستونهای B است. بنابراین اگر P3, P2, P1 ستونهای P را نمایش دهند و ماتریس قطری D به صورت

$$D=\begin{bmatrix}d_{11}&0&0\\0&d_{22}&0\\0&0&d_{33}\end{bmatrix} \qquad (1-19)$$

باشد حاصل AP=PD برابر است با $[AP_1\ AP_2\ AP_3]=[d_{11}P_1\ d_{22}P_2\ d_{33}P_3]$

و یا

$$AP_1=d_{11}P_1, AP_2=d_{22}P_2, \qquad AP_3=d_{33}P_3 \qquad (1-20)$$

قضیه: هرگاه ماتریس A_{n*n} دارای n بردار ویژه مستقل بـه ترتیـب $V_1, V_2, \ldots, V_n$ باشـد آنگـاه A قطری پذیر است.

مثال1-6: ماتریس زیر را قطری کنید:

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

حـل:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -6 & 10-\lambda \end{bmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4 \Rightarrow \quad \lambda_1=1 \Rightarrow V_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda_2=4 \Rightarrow V_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$P=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=D$$

اگر معکوس گردد $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تمرین1-7 :

الف) مشخص کنید که آیا ماتریس A قطری پذیر است یا نه. در صورت مثبت بودن جـواب مـاتریس های P و D را چنان تعیین کنید که $D=P^{-1}AP$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

حل : $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ب) جواب را با Mathematica نیز بدست آورید.

1-2 مشتقات بردارها و ماتریسها و توابع آنها

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \tag{1-21}$$

$$X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \tag{1-22}$$

فرض کنید Y تابعی از X باشد.

$$Y = Y(X) = \begin{pmatrix} y_1(X) \\ y_2(X) \\ \vdots \\ y_m(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{1-23}$$

مشتق Y نسبت به X

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial X \\ \partial y_2 / \partial X \\ \vdots \\ \partial y_m / \partial X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_1 / \partial x_n \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_m / \partial x_1 & \partial y_m / \partial x_2 & \cdots & \partial y_m / \partial x_n \end{pmatrix} \in R^{m*n} \tag{1-24}$$

در حالیکه m=1 باشد.

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) \tag{1-25}$$

اگر المانهای X توابعی از پارامتر t باشند، مشتق Y نسبت به t برابر:

$$\frac{dY}{dt}=\begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ \vdots \\ dy_m/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_1/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_1/\partial x_n\ dx_n/dt \\ \partial y_2/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_2/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_2/\partial x_n\ dx_n/dt \\ \vdots \\ \partial y_m/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_m/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_m/\partial x_n\ dx_n/dt \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_m/\partial x_1 & \partial y_m/\partial x_2 & \cdots & \partial y_m/\partial x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix}=\frac{\partial Y}{\partial X}\frac{dX}{dt} \qquad (1\text{–}26)$$

مثال1–7 مطلوب است مشتق بردار موقعیت یک بازوی دو درجه آزادی صفحه ای:

شکل1–1

$$R=\begin{pmatrix} r_1(\theta) \\ r_2(\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1\cos\theta_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\sin\theta_1+l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

برای سرعت نقطه انتهایی این بازو بدست خواهیم آورد :

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}=\begin{pmatrix} \partial r_1/\partial\theta_1 & \partial r_1/\partial\theta_2 \\ \partial r_2/\partial\theta_1 & \partial r_2/\partial\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -l_1\sin\theta_1-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1+l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{pmatrix}$$

1–2–1 مشتقات ماتریسها

وقتیکه A یک تابعی از X و

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \in R^{l*m}$$

که در آن :

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad ; \qquad a_{ij} = a_{ij}(X) = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

مشتق A نسبت به t:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial A}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \tag{1–27}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \partial a_{11}/\partial x_i & \partial a_{12}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{1m}/\partial x_i \\ \partial a_{21}/\partial x_i & \partial a_{22}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{2m}/\partial x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial a_{l1}/\partial x_i & \partial a_{l2}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{lm}/\partial x_i \end{pmatrix} \tag{1–28}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial X}\frac{dX}{dt} \tag{1–29}$$

مثال8–1: مطلوب است مشتق بردار سرعت نقطه انتهایی یک بازوی دو درجه آزادی صفحه ای

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) = \frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial J}{\partial \theta_i}\frac{d\theta_i}{dt} \tag{1–30}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial J}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\dot{\theta}_1 \tag{1–31}$$

$$+ \begin{pmatrix} -l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\dot{\theta}_2$$

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{\partial J}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}$$

ترم دوم در معادله 30-1

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \theta})\frac{d\theta}{dt} \quad =(\frac{\partial J}{\partial \theta_1}\dot{\theta}_1+\frac{\partial J}{\partial \theta_2}\dot{\theta}_2)\frac{d\theta}{dt} \quad =\dot{\theta}_1\frac{\partial J}{\partial \theta_1}\frac{d\theta}{dt}+\dot{\theta}_2\frac{\partial J}{\partial \theta_2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\dot{\theta}_1\begin{pmatrix}-l_1\cos\theta_1-l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ -l_1\sin\theta_1-l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix} \quad (1-32)$$

$$+\dot{\theta}_2\begin{pmatrix}-l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-l_1\cos\theta_1-l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ -l_1\sin\theta_1-l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\dot{\theta}_1^2+\begin{pmatrix}-l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\ -l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_2^2)$$

تمرین7-1 مشتق دترمینان: ثابت کنید برای مشتق دترمینان ماتریس A رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt}\det A(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\{\det A(t)\}\frac{da_{ij}(t)}{dt}$$

3-1 تانسورها:

در نگاشت اسکالرها توسط توابع داریم :

$$x\to y(x),\qquad \Delta y=y'.\Delta x \qquad (1-33)$$

یعنی تغییرات تابع y در اثر تغییرات x را می‌توان توسط y' بدست آورد. اکنون همین موضوع را در مورد نگاشت بردارها بررسی می نماییم. برای نگاشت میدان برداری $\vec{r}$ توسط تابع برداری $\vec{s}(\vec{r})$ به طریق مشابه می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{r}\to\vec{s}(r),\qquad \Delta\vec{s}=A\Delta\vec{r} \qquad (1-34)$$

در اینجا A چیست؟ A نمی‌تواند یک عدد اسکالر باشد، زیرا ضرب یک اسکالر در یک بردار، برداری در همان جهت ارائه می‌دهد و این نمی‌تواند برای هر تابع دلخواه s درست باشد. همچنین A نمی‌تواند یک بردار باشد زیرا از ضرب دو بردار یک عدد اسکالر حاصل می‌گردد نه یک بردار. بنابراین A ماهیت دیگری دارد که آنرا تانسور می‌نامند. به عبارت دیگر تانسور بیانگر یک تبدیل خطی از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر می‌باشد. تانسورها توسط ماتریسها نمایش داده می‌شوند؛ به

عبارت دیگر تانسورها زیردسته‌ای از ماتریسها هستند که ارتباط بین دو فضای برداری را توصـیف می‌کنند.

عملیات ریاضی برروی تانسورها به شرح زیر می‌باشد:

- ضرب تانسور در بردار:

طبق تعریف ضرب تانسور در بردار، بردار دیگری را نتیجه می‌دهد. ایـن ضـرب بـصورت ضرب ماتریس در بردار می‌باشد.

- ضرب اسکالر در تانسور:

ضرب اسکالر در تانسور را در اصطلاح گسترش ایزوتروپیک[1] می‌گویند، زیرا باعث تغییـر اندازه تمامی بردارها به یک اندازه می‌شود.

$$(\lambda\hat{A})\mathbf{x} = \lambda\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\lambda\mathbf{x} \tag{1-35}$$

- جمع و تفریق :

$$(\hat{A}\pm\hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x} \tag{1-36}$$

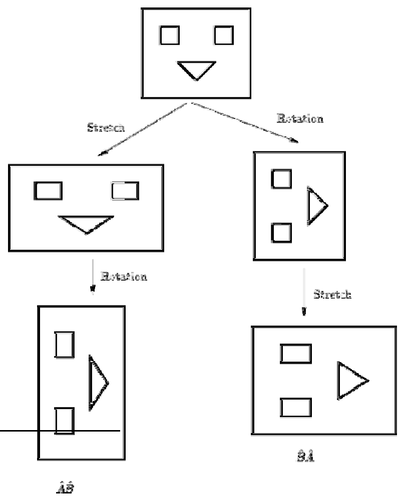
1-3-1 ضرب تانسورها:

$$\hat{A}\mathbf{r}=\mathbf{s}\ ,\quad \hat{B}\mathbf{s}=\mathbf{t}\Rightarrow\hat{B}\hat{A}\mathbf{r}=\mathbf{t} \tag{1-37}$$

به ترتیب تانسورهای A و B توجه کنید.

- تمامی قوانین معمولی جبری برای تانسورها هم صادق هستند، به جز جابجایی پذیری:

$$\hat{A}\hat{B}\neq\hat{B}\hat{A} \tag{1-38}$$



(1-39)

[1] Isotropic Stretch

همانطور که گفته شد تانسورها بیانگر تبدیلات خطی بین فضاهای برداری هستند. اگر فرض کنیم بردارهای r و s در فضاهای 3 بعدی تعریف شده باشند، برای نشان دادن یک تانسور داریم:

$$s=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{r}=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 \\ s_2 = a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 \\ s_3 = a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 \end{cases} \tag{1-40}$$

بنابراین تانسور را می‌توانیم توسط یک ماتریس نشان دهیم :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-41}$$

معمولا برای سادگی مثلا به جای "ماتریس بیانگر تانسور دوران" فقط گفته می‌شود "ماتریس دوران".

1-4 مفاهیم اولیه:

به منظور فرموله کردن سیستم ها ، بررسی مفاهیم و روشهای ریاضی مورد نیاز ضروری بنظر میرسد.

1-4-1 تعریف مختصات:

اگر بردار P و $x=\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ محورهای قائم در فضای R^n باشد و مختصات P نسبت به x را بصورت $[P]^x$ نمایش دهند، داریم

$$P=\sum_{k=1}^{n}[P]_k^x x^k \tag{1-42}$$

$$[P]^m=\left[P.m^1, P.m^2, P.m^3\right]^T$$ بردار موقعیت در دستگاه متحرک

$$[P]^F=\left[P.f^1, P.f^2, P.f^3\right]^T$$ بردار موقعیت در دستگاه ثابت

1-4-2 تغییر حالت مختصات:

اگر $F=\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ و $M=\{m^1, m^2, \ldots, m^n\}$ قابهای مختصات در فضای R^n و A ماتریس n×n، بصورت $A_{kj}=f^k.m^j$ $1 \le k, j \le n$ تعریف شوند، آنگاه برای هر نقطهٔ P در فضای R^n داریم

$$[P]^F = A[P]^m \tag{1-43}$$

که در آن

$$A=\begin{bmatrix} f^1.m^1 & f^1.m^2 & f^1.m^3 \\ f^2.m^1 & f^2.m^2 & f^2.m^3 \\ f^3.m^1 & f^3.m^2 & f^3.m^3 \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}44)$$

1-4-3 ماتریس دوران:

اگر قاب مختصات متحرک M حول یکی از بردارهای واحد قاب مختصات ثابت F دوران نماید، آنگاه نتیجه ماتریس تبدیل را ماتریس دوران گویند.

حول f^1

$$R_1(\phi) = A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f^2.m^2 & f^2.m^3 \\ 0 & f^3.m^2 & f^3.m^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

(1–45)

حول f^2

$$R_2(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

و حول f^3

$$R_3(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

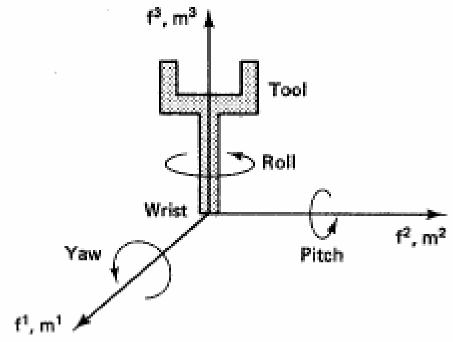
1–4–4 دورانهای مرکب:

حاصلضرب چند ماتریس دوران در هم معرف دورانهای متـوالی حـول بـردار واحـد اسـت و بـه آن دورانهای مرکب گویند. توسط دورانهای مرکب، جهت گیری دلخواه دست بازوی مکانیکی امکان پذیر میشود.

قضیه1–4–1.: تغییر حالت (تبدیل) گردش Y و پیچش P، چرخش R (YPR):

$$YPR(\phi) = R_3(\phi_3)R_2(\phi_2)R_1(\phi_1) \qquad (1\text{–}46)$$

$$=\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_2c_3 & s_1s_2c_3-c_1s_3 & c_1s_2c_3+s_1s_3 \\ c_2c_3 & s_1s_2s_3+c_1c_3 & c_1s_2s_3-s_1c_3 \\ -s_2 & s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$



شکل 2-1

قضیه 2-4-1. : معادل محور زاویه ای :

اگر F , M دو قاب مختصات عمود در فضای R^3 بر هم منطبق باشند و M حول بردار واحد U به اندازهٔ ϕ سمت راست بچرخد، انگاه ماتریس دوران معادل محور زاویه ای آن $R(\phi,u)$ که مختصات M را نسبت به مختصات F بیان می نماید، عبارتند از

$$V_\phi = 1-\cos\phi \qquad (1\text{-}47)$$

قضیه3-4-1 : دوران پایه:

هر گاه ماتریس دوران R معلوم باشد بنحوی که دوران حول محور f^k صورت گرفته باشد.

$$R(\phi,\ f^k)=R_k(\phi) \qquad 1\le k\le 3 \qquad (1\text{-}48)$$

آنگاه داریم:

$$\phi = arc\cos\left[\frac{trace(R)-1}{2}\right];\ u=\frac{1}{2\sin\phi}\begin{bmatrix} R_{32}-R_{23} \\ R_{13}-R_{31} \\ R_{21}-R_{12} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}49)$$

1-5 مقدمات ریاضی

1-5-1 موقعیت و جهت یک جسم صلب

مطابق شکل 3-1 موقعیت جسم صلب نسبت به این سیستم مختصات ثابت O-xyz بـه صـورت زیـر بیان می‌شود:

$$X_o = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}50)$$

که در آن X_o یک بردار 3×1 ستونی است.

برای بیان جهت جسم صلب، از سه محور مختصات z_b, y_b, x_b که به جسم صلب متصلند، اسـتفاده مـی‌شود.

$$R = [n\ ,\ t\ ,\ b] \qquad (1\text{-}51)$$

ماتریس R جهت جسم صلب را بطور کامل و با توجه به مرجع مختصات ثابت O-xyz بیان مـی‌کنـد. توجه داشته باشید که بردارهای ستونی ماتریس R دو به دو بر هم عمودند:

$$n^T t = 0,\ t^T b = 0,\ b^T n = 0 \qquad (1\text{-}52)$$

و همچنین دارای طول واحدند:

$$|n| = 1,\ |t| = 0\ ,\ |b| = 1 \qquad (1\text{-}53)$$

1-5-2 تبدیلات مختصات

مختصات نقطهٔ P را با توجه به مختصات ثابت O-xyz به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}54)$$

همچنین موقعیت نقطهٔ P را با توجه به سیستم مختصات متصل بـه جـسم صـلب، $O' - x_b y_b z_b$، بـا رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم:

$$X^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}55)$$

از طریق نقاط B, A, O' می‌توان به نقطهٔ P رسید.

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'A} + \vec{AB} + \vec{BP} \qquad (1\text{-}56)$$

که در آن $\vec{OP} = X$ و $\vec{OO'} = X_o$ است. می‌توانیم عبارت فوق را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

(1-57)

$$X = X_o + un + vt + wb$$

که از روابط (1–57) و (1–55) نیز نتیجه می‌شود:

$$X = X_o + RX^b \qquad (1-58)$$

طرفین معادلهٔ (1–58) را در ماتریس R^T که ترانهادهٔ ماتریس R است، پیش‌ضرب می‌کنیم:

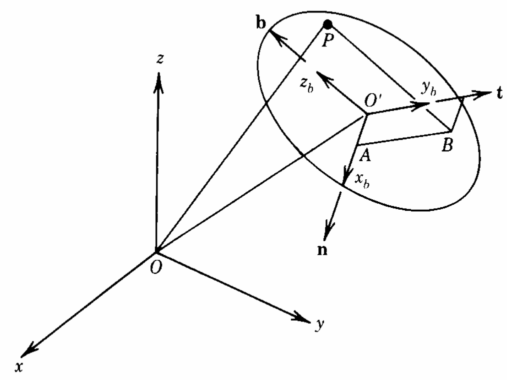
$$R^T X = R^T X_o + R^T R X^b \qquad (1-59)$$

با توجه به روابط(1–53)و (**1–52**) و ماتریس حاصلضرب $R^T R$ در طرف راست خواهد شد:

$$R^T R = \begin{bmatrix} n^T n & n^T t & n^T b \\ t^T n & t^T t & t^T b \\ b^T n & b^T t & b^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1-60)$$

بنابراین معادلهٔ(59–1) به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$X^b = -R^T X_o + R^T X \qquad (1-61)$$



شکل1-3: تبدیل مختصات

همانطوری که معادلهٔ (1–61) نشان می دهد، عکس یک ماتریس متعامد به راحتی توسط ترانهـادهٔ آن ماتریس به دست می‌آید:

$$R^{-1} = R^T \qquad (1-62)$$

1-5-3 تبدیلات همگن

تبدیل ماتریسی که از معادلهٔ (1-58) به دست آمده را به یاد آورید

$$X = X_o + RX^b$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \; X^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

و ماتریس 4×4

$$A = \begin{bmatrix} R & & \vdots & X_o \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ o & & \vdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}63)$$

بنابراین معادلهٔ (1-58) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X = AX^b$$

یعنی:

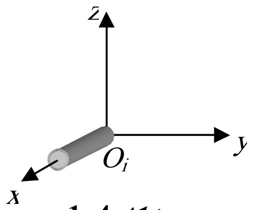
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & & \vdots & X_o \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ o & & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}64)$$

1-5-4 ماتریس انعطاف پذیر

موقعیت یک نقطه در فضای کارتزین را با بردار افزایش یافته زیر نمایش خواهیم داد

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix}^T$$

سیستم مختصات $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_i$ روی لینک i واقع می‌باشد، بطوری که O_i در انتهای لینک (در سمت پایه) قرار داشته و محور x آن منطبق بر محور خنثی تیر در حالت تغییر فرم نیافته باشد

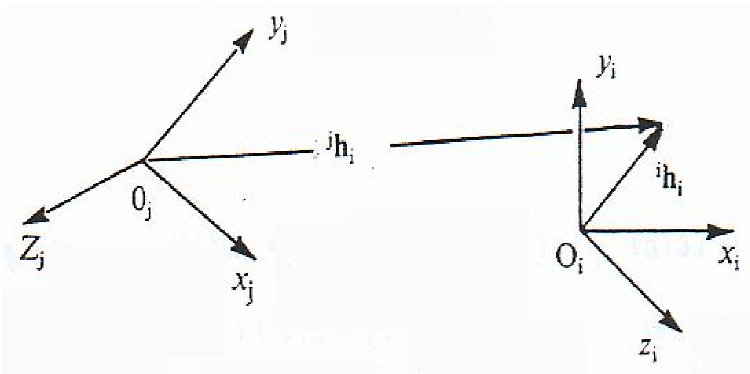


شکل 4-1

نقطه ای روی لینک iام به فاصله η از ابتدای لینک، زمـانی کـه تغییـر شـکل داده اسـت در $^ih_i(\eta)$ خواهد بود. موقعیت نسبت به مبدا مختصات O_j با $^jh_i(\eta)$ مـشخص مـی شـود کـه اگـر نـسبت بـه مختصات پایه حساب شود با $h_i(\eta)$ نشان داده می شود.

$$h_i = {}^0W_i\,{}^ih_i = W_i\,{}^ih_i \qquad {}^jh_i={}^jW_i\,{}^ih_i \tag{1-65}$$

$$^jW_i = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ x_j & \\ y_j & {}^jR_i \\ z_j & \end{bmatrix} \tag{1-66}$$



شکل5-1

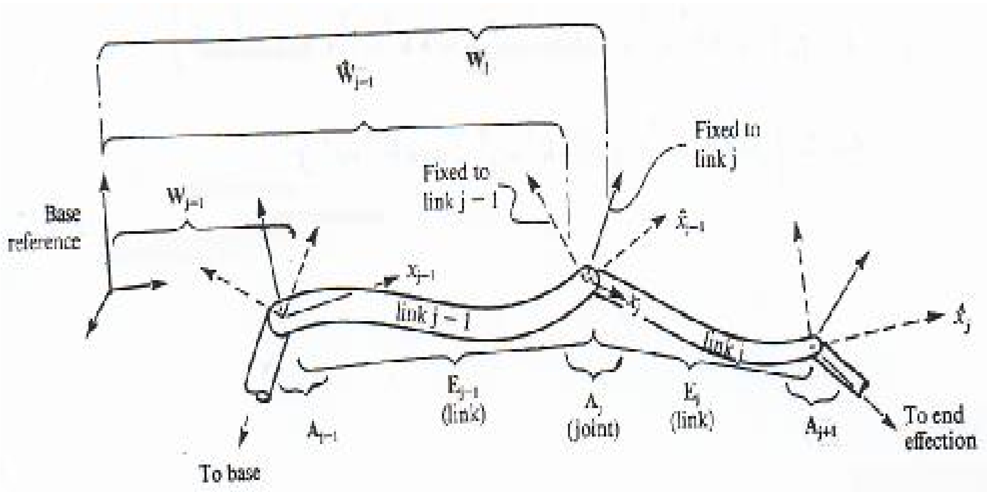
انتقال به علت حرکت و تغییر مکان به علت انعطاف پذیری لینک را از هم جدا می‌کنیم :

$$W_j = W_{j-1}E_{j-1}A_j = \hat{W}_{j-1}A_j \tag{1-67}$$

A_j: ماتریس تبدیل مربوط به مفصل بین دو لینک j-1,j

E_{j-1}: ماتریس تبدیل مربوط به انعطاف پذیری لینک j-1 .

$\hat{W}_{j-1}$: جمع تبدیلها از مختصات پایه تا $\hat{O}_{j-1}$ در انتهای لینکj -1



شکل 6-1

$\hat{O}_{j-1}$ روی لینک $j-1$ واقع است، و در حالتی که تغییر فرم نداشته باشیم $\begin{bmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\end{bmatrix}_{j-1}$ موازی با $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}_{j-1}$ خواهد بود، بطوریکه محور x_{j-1} منطبق بر $\hat{x}_{j-1}$ می‌باشد.

برای داخل کردن تغییر فرم لینک روش آنالیز مودال را دنبال خواهیم کرد. (این روش برای تغییر فرمهای کوچک مورد استفاده قرار می‌گیرد). همانطور که گفته شد جابجایی لینک در اثر انعطاف پذیری با ${}^{i}h_i(\eta)$ مشخص می‌گردد. این بردار به صورت زیر مشخص می‌شود :

$$ {}^{i}h_i(\eta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{ij}(\eta) \\ y_{ij}(\eta) \\ z_{ij}(\eta) \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}68) $$

x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} : جابجایی x_i, y_i, z_i روی لینک iام در اثر مود jام.

δ_{ij}: متغیر زمانی میدان نوسان مربوط به مود jام از لینک iام.

m_i: تعداد مودهای مورد نیاز برای بیان انحنای لینک iام.

برای یافتن بردار $h_i(\eta)$ با توجه به رابطه (65-1) نیاز به ماتریس انعطاف پذیری E داریم. تبدیل مربوط به انعطاف پذیری بصورت زیر بیان می گردد:

$$ E_i = \left[H_i + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} M_{ij} \right] \qquad (1\text{–}69) $$

که در آن:

$$ H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{ij} & 0 & -\theta_{zij} & \theta_{yij} \\ y_{ij} & \theta_{zij} & 0 & -\theta_{xij} \\ z_{ij} & -\theta_{yij} & \theta_{xij} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}70) $$

در این ماتریسها:

$\theta_{zij}, \theta_{yij}, \theta_{xij}$: چرخش حول z_i ,y_i ,x_i مربوط به لینک iام در مود jام و L_i طول لینک iام می‌باشند.

بنابراین با داشتن زوایای چرخشی θ می‌توان از تبدیل مختصات (1-66) استفاده کرده و $h_i(\eta)$ را پیدا نمود.

برای به دست آوردن سرعت یک نقطه لینک، از عبارت (1-65) مشتق بر حسب زمان خواهیم گرفت

$$\frac{dh_i}{dt} = \dot{h}_i = (W_i^i h_i)^{\cdot} = \dot{W}_i^{\,i} h_i + W_i^i \dot{h}_i \tag{1-71}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_j &= \dot{\hat{W}}_{j-1} A_j + \hat{W}_{j-1} \dot{A}_j \\ \ddot{w}_j &= \ddot{\hat{w}}_{j-1} A_j + 2\dot{\hat{w}}_{j-1} \dot{A}_j + \hat{w}_{j-1} \ddot{A}_j \end{aligned} \tag{1-72}$$

که در آن:

$$U_j = \partial A_j / \partial q_j; \quad \dot{A}_j = U_j \dot{q}_j \tag{1-73}$$

$$U_{2j} = \partial^2 A_j / \partial q_j^2 \quad \ddot{A}_j = U_{2j} \dot{q}_j^2 + U_j \ddot{q} \tag{1-74}$$

همچنین برای محاسبه $\dot{\hat{W}}_j$, $\ddot{\hat{W}}_j$ داریم:

$$\hat{W}_j = W_j E_j, \tag{1-75}$$

$$\dot{\hat{W}}_j = \dot{W}_j E_j + W_j \dot{E}_j, \tag{1-76}$$

$$\ddot{\hat{W}}_j = \ddot{W}_j E_j + 2\dot{W}_j \dot{E}_j + W_j \ddot{E}_j, \tag{1-77}$$

با مشتق گیری از معادله (1-69) داریم:

$$\dot{E}_j = \sum_{k=1}^{m_j} \dot{\delta}_{jk} M_{jk} \tag{1-78}$$

$$\ddot{E}_j = \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} M_{jk} \tag{1-79}$$

مثال1-9 بازوی تک لینکی انعطاف پذیر

در این قسمت معادلات سینماتیک بازوی تک لینک انعطاف پذیر را استخراج می کنیم. برای بازوی مورد نظر روابط سینماتیک به صورت خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= A_1 \\
\hat{W}_1 &= A_1\, E_1
\end{aligned}
\qquad (1\text{–}80)
$$

که در آنها A_1 و E_1 را بصورت زیر بیان کنیم:

$$
{}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{–}81)
$$

$$
E_1 = \left[H_1 + \delta_{11} M_{11} + \delta_{12} M_{12}\right]
$$

برای این تک لینک 2 تا تابع مود شکل δ_{12}, δ_{11} را برای بررسی چگونگی تغییر فرم لینک به علت انعطاف پذیری آن در نظر گرفته‌ایم. در این رابطه $M_{12}(\eta), M_{11}(\eta), H_1$ عبارتند از:

$$
H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & 0 & -\theta_{z11} & \theta_{y11} \\ y_{11} & \theta_{z11} & 0 & -\theta_{x11} \\ z_{11} & -\theta_{y11} & \theta_{x11} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & -\theta_{z12} & \theta_{y12} \\ y_{12} & \theta_{z12} & 0 & -\theta_{x12} \\ z_{12} & -\theta_{y12} & \theta_{x12} & 0 \end{bmatrix}
$$

مثال 10–1 بازوی دو لینکی انعطاف پذیر: در اینجا معادلات سینماتیک بازگشتی بازوی دو لینکی انعطاف پذیر را استخراج می کنیم. برای بازوی مورد نظر روابط سینماتیک به صورت خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= A_1 \\
\hat{W}_1 &= A_1\, E_1 \\
W_2 &= W_1\, E_1\, A_2 \\
\hat{W}_2 &= A_1\, E_1\, A_2\, E_2
\end{aligned}
$$

که در آنها A_1 و E_1 و A_2 و E_2 را بصورت زیر اختیار می کنیم:

$$ {}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ E_1 = \left[H_1 + \delta_{11} M_{11} + \delta_{12} M_{12}\right] \qquad E_2 = \left[H_2 + \delta_{21} M_{21} + \delta_{22} M_{22}\right] $$

برای هر لینک 2 تا تابع مود شکل یعنی δ_{12}, δ_{11} و δ_{22}, δ_{21} برای بررسی چگونگی تغییر فرم لینک تعریف می کنیم. در این رابطه ها $M_{12}(\eta), M_{11}(\eta), H_1$ و $M_{22}(\eta), M_{21}(\eta), H_2$ عبارتند از:

$$ H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & 0 & -\theta_{z11} & \theta_{y11} \\ y_{11} & \theta_{z11} & 0 & -\theta_{x11} \\ z_{11} & -\theta_{y11} & \theta_{x11} & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{12} & 0 & -\theta_{z12} & \theta_{y12} \\ y_{12} & \theta_{z12} & 0 & -\theta_{x12} \\ z_{12} & -\theta_{y12} & \theta_{x12} & 0 \end{bmatrix} $$

1-6 معادلات لاگرانژ و دینامیک بازوهای انعطاف پذیر

برای بدست آوردن معادلات دینامیکی بازوی انعطاف پذیر از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. همانطور که می‌دانید معادله لاگرانژ به فرم زیر می‌باشد:

$$ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \qquad (1\text{–}82) $$

که در آن

$$ L = K - V \qquad (1\text{–}83) $$

K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل سیستم می‌باشد.

الف) انرژی جنبشی:

ابتدا انرژی جنبشی سیستم را محاسبه می‌کنیم؛ برای لینک iام المان انرژی جنبشی (برای المان جرم $\mathrm{d}m$) برابر است با:

$$ \mathrm{d}k_i = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\,\mathrm{Tr}\left\{\dot{\mathbf{h}}_i \dot{\mathbf{h}}_i^{\mathrm{T}}\right\} \qquad (1\text{–}84) $$

با توجه به رابطه 71-1نتیجه می شود:

$$\mathrm{d}k_i = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\mathrm{Tr}\left\{\dot{\mathbf{W}}_\mathrm{i}\,{}^\mathrm{i}\mathbf{h}_\mathrm{i}\mathbf{h}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\dot{\mathbf{W}}_\mathrm{i}^\mathrm{T} + 2\dot{\mathbf{W}}_\mathrm{i}\,{}^\mathrm{i}\mathbf{h}_\mathrm{i}\dot{\mathbf{h}}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{i}^\mathrm{T} + \mathbf{W}_\mathrm{i}\,{}^\mathrm{i}\dot{\mathbf{h}}_\mathrm{i}\dot{\mathbf{h}}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathbf{W}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\right\} \qquad (1\text{–}85)$$

که در آن مشتق گیری از رابطه (68-1) داریم:

$${}^i\dot{\mathbf{h}}_i = \sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\begin{bmatrix}0 & x_{ij} & y_{ij} & z_{ij}\end{bmatrix}^\mathrm{T} \qquad (1\text{–}86)$$

m_i تعداد مودهای ارتعاشی در نظر گرفته شده می‌باشد.

انرژی جنبشی کل سیستم بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\mathrm{d}k_i = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}\left\{\dot{\mathbf{W}}_i\mathbf{B}_{3i}\dot{\mathbf{W}}_i^T + 2\dot{\mathbf{W}}_i\mathbf{B}_{2i}\mathbf{W}_i^T + \mathbf{W}_i\mathbf{B}_{1i}\mathbf{W}_i^T\right\} \qquad (1\text{–}87)$$

که در آن:

$$\mathbf{B}_{1i} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu.{}^i\dot{\mathbf{h}}_i.{}^i\dot{\mathbf{h}}_i^\mathrm{T}d\eta = \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\dot{\delta}_{ik}\mathbf{C}_{ikj}\ ,\mathbf{C}_{ikj} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu\begin{bmatrix}0 & x_{ik} & y_{ik} & z_{ik}\end{bmatrix}^\mathrm{T}\begin{bmatrix}0 & x_{ij} & y_{ij} & z_{ij}\end{bmatrix}\mathrm{d}\eta$$

$$\mathbf{B}_{2i} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu.{}^i\mathbf{h}_i.{}^i\dot{\mathbf{h}}_i^\mathrm{T}d\eta = \sum_{j=1}^{m_i}\dot{\delta}_{ij}\mathbf{C}_{ij} + \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}\dot{\delta}_{ij}\mathbf{C}_{ikj}\ ,\mathbf{C}_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu\begin{bmatrix}1 & \eta & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathrm{T}\begin{bmatrix}0 & x_{ij} & y_{ij} & z_{ij}\end{bmatrix}\mathrm{d}\eta$$

$$\mathbf{B}_{3i} = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu.{}^i\mathbf{h}_i.{}^i\mathbf{h}_i^\mathrm{T}d\eta = \mathbf{C}_i + \sum_{j=1}^{m_i}\delta_{ij}\left[\mathbf{C}_{ij} + \mathbf{C}_{ij}^\mathrm{T}\right] + \sum_{j=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}\delta_{ij}\mathbf{C}_{ikj}\ ,\mathbf{C}_i = \frac{1}{2}\int_0^{l_i}\mu\begin{bmatrix}1 & \eta & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathrm{T}\begin{bmatrix}1 & \eta & 0 & 0\end{bmatrix}\mathrm{d}\eta$$

سمت راست رابطه‌های $\mathbf{B}_{1i}$ ، $\mathbf{B}_{2i}$ و $\mathbf{B}_{3i}$ با توجه به رابطه (68-1) قابل تحقیق است. توجه کنید که ماتریس های $\mathbf{C}_i$، $\mathbf{C}_{ikj}$ و $\mathbf{C}_{ij}$ دارای ترم های ماتریس تانسور اینرسی هستند و به همان صورت نیز عمل می‌کنند. این ماتریسها در اینجا با ساده کردن شکل لینکها به صورت میله‌هایی در راستای محور x به روابط فوق رسیدیم. در حالت کلی و برای شکل های نامتقارن برای لینکها، ماتریس های C با روش های المان محدود محاسبه می‌گردد. همچنین دقت کنید که $\mathbf{B}_{3i}$ دارای ترمی متشکل از δ^2 است که با توجه به کوچک فرض شدن مقدار δ در محاسبات بعدی از آن چشم پوشی می‌گردد.

ب) انرژی پتانسیل:

انرژی پتانسیل سیستم از دو قسمت تشکیل می‌گردد. قسمت اول انرژی پتانسیل الاستیک و قسمت دیگر انرژی پتانسیل ناشی از گرانش می‌باشد.

1-6-1انرژی پتانسیل الاستیک:

نقطه‌ای را روی لینک iام (لینک در راستای محور xها) در نظر بگیرید که دچار تغییر شکلی کوچک در اثر انعطاف پذیری می‌گردد. انرژی پتانسیل را برای خمش[2] هایی حول محورهای y_i و z_i و پیچش[3] حول محور x_i حساب می‌کنیم. فشردگی[4] به دلیل کوچک بودن مقدار آن در نظر گرفته نمی‌شود.در طول dη المان انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\mathrm{d}\, v_{ei} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\,\eta\left\{\mathrm{E}\left[\mathrm{I}_z\left(\frac{\partial\theta_{zi}}{\partial\eta}\right)^2 + \mathrm{I}_y\left(\frac{\partial\theta_{yi}}{\partial\eta}\right)^2\right] + G\mathrm{I}_x\left(\frac{\partial\theta_{xi}}{\partial\eta}\right)^2\right\} \qquad (1\text{-}88)$$

در این رابطه، θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} زوایای چرخش محوراصلی (راستای میله) لینک در نقطه η نسبت به نقطه اولیه شروع لینک (η=0) می‌باشد، E و G مدول الاستیک یانگ به ترتیب برای خمش و پیچش ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی لینک هستند، I_x ، I_y و I_z ممان های اینرسی لینک حول محورهای مربوطه می‌باشند.

زوایای تغییر شکل θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} را از آنالیز مدال بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\theta_{xi} = \sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}\theta_{xik} \qquad (1\text{-}89)$$

که در آن θ_{xik} زاویه تغییر شکل لینک iام در اثر مود kام حول محور x در نقطه η می‌باشد.

با انتگرال گیری از المان دیفرانسیلی انرژی پتانسیل حول طول لینک‌ها و جمع انرژی پتانسیل کلیه لینکها خواهیم داشت:

$$V_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{l=1}^{m_i}\delta_{ik}\delta_{il}K_{ikl} \quad , K_{ikl} = K_{xikl} + K_{yikl} + K_{zikl}$$

که در آن

$$\begin{aligned} K_{xikl} &= \int_0^{l_i} GI_x(\eta)\frac{\partial\theta_{xil}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{xik}}{\partial\eta}\,d\eta, \\ K_{yikl} &= \int_0^{l_i} EI_y(\eta)\frac{\partial\theta_{yil}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{yik}}{\partial\eta}\,d\eta, \\ K_{zikl} &= \int_0^{l_i} EI_z(\eta)\frac{\partial\theta_{zil}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{zik}}{\partial\eta}\,d\eta \end{aligned} \qquad (1\text{-}90)$$

1-6-2 انرژی پتانسیل مربوط به گرانش:

برای المان دیفرانسیلی dη انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با:

$$\mathrm{d}\,v_{gi} = -\mu\mathbf{g}^T\mathbf{W}_i{}^i\mathbf{h}_i\mathrm{d}\eta \quad , \mathbf{g}^T = [0 \quad g_x \quad g_y \quad g_z] \qquad (1\text{-}91)$$

---

[2] Bend
[3] Twist
[4] Compression

از انتگرال گیری در طول لینک‌ها و جمع انرژی پتانسیل همه لینکها خواهیم داشت:

$$V_g = -\mathbf{g}^T \sum_{i=1}^{n} \mathbf{W}_i \mathbf{r}_\mathrm{i} \quad , \mathbf{r}_\mathrm{i} = M_i \mathbf{r}_{ri} + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik} \varepsilon_{ik}$$

که در آن Mi وزن لینک iام و

$$\mathrm{r}_\mathrm{ri} = \begin{bmatrix} 1 & r_{xi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1\text{–}92)$$

$$\varepsilon_\mathrm{ik} = \int_0^{l_i} \mu \begin{bmatrix} 0 & x_{ik} & y_{ik} & z_{ik} \end{bmatrix}^T \mathrm{d}\eta$$

ε_ik فاصله میان مرکز جرم تغییر شکل داده در اثر مود kام را نسبت به مرکز جرم بدون تغییر شکل بیان می‌نماید.

1-6-3 محاسبه معادله لاگرانژ

با تفکیک L در رابطه (1–82) به انرژیهای جنبشی و پتانسیل بدست آمده معادلـه لاگرانـژ را بـه فـرم زیر خواهیم داشت:

1. معادله‌ی لاگرانژ برای مفاصل :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial V_e}{\partial q_j} + \frac{\partial V_g}{\partial q_j} = F_j \qquad (1\text{–}93)$$

2. معادله‌ی لاگرانژ برای تغییر شکل :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}_{jf}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \delta_{jf}} + \frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}} + \frac{\partial V_g}{\partial \delta_{jf}} = 0 \qquad (1\text{–}94)$$

در این معادلات:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = 2\sum_{i=j}^{n} \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_j}\left[\mathbf{G}_i \ddot{\mathbf{W}}_i^T + \sum_{k=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ik} \mathbf{D}_{ik} \mathbf{W}_i^T + 2\sum_{k=1}^{m_i} \dot{\delta}_{ik} \mathbf{D}_{ik} \dot{\mathbf{W}}_i^T\right]\right\}$$

که در آن :

$$\mathbf{D}_{ik} = \mathbf{C}_{ik} + \sum_{l=1}^{m_i} \delta_{il} \mathbf{C}_{ilk}, \qquad (1\text{–}95)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{C}_i + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik}\left(\mathbf{C}_{ik} + \mathbf{C}_{ik}^T\right) + \sum_{l=1}^{m_i} \delta_{il} \mathbf{C}_{ilk})$$

دقت کنید که $\dot{W}$ و $\ddot{W}$ را می‌توان از رابطه 1–71 و 1–72 به دست آورد.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\delta}_{jf}}\right)-\frac{\partial K}{\partial \delta_{jf}}=2\sum_{i=j+1}^{n}\mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial \delta_{jf}}\left[\mathbf{G}_i\ddot{\mathbf{W}}_i^T+\sum_{k=1}^{m_{ji}}\ddot{\delta}_{ik}\mathbf{D}_{ik}\mathbf{W}_i^T+2\sum_{k=1}^{m_j}\dot{\delta}_{ik}\mathbf{D}_{ik}\dot{\mathbf{W}}_i^T\right]\right\}$$

$$+\mathrm{Tr}\left\{2\left[\ddot{\mathbf{W}}_j\mathbf{D}_{jf}+2\dot{\mathbf{W}}_j\sum_{k=1}^{m_j}\dot{\delta}_{jk}\mathbf{C}_{jkf}+\mathbf{W}_j\sum_{k=1}^{m_j}\ddot{\delta}_{jk}\mathbf{C}_{jkf}\right]\mathbf{W}_j^T\right\}$$

(1-96)

که در آن:

$$\mathbf{D}_{ik}=\mathbf{C}_{ik}+\sum_{l=1}^{m_i}\delta_{il}\mathbf{C}_{ilk},$$

$$\mathbf{G}_i=\mathbf{C}_i+\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{ik}\left(\mathbf{C}_{ik}+\mathbf{C}_{ik}^T\right)+\sum_{l=1}^{m_i}\delta_{il}\mathbf{C}_{ilk}$$

همچنین

$$\frac{\partial V_e}{\partial q_j}=0$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}}=\sum_{k=1}^{m_i}\delta_{jk}K_{jkf}$$

(1-97)

$$\frac{\partial V_g}{\partial q_j}=-\mathbf{g}^T\sum_{i=j}^{n}\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial q_j}\mathbf{r}_i$$

$$\frac{\partial V_g}{\partial \delta_{jf}}=-\mathbf{g}^T\sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial \delta_{jf}}\mathbf{r}_i\right)-\mathbf{g}^T\mathbf{W}_j\varepsilon_{jf}$$

بنابراین با جایگذاری روابط فوق در معادلات لاگرانژ (1-93) و (1-94) معادلات دینـامیکی معکـوس بازوهای انعطاف پذیر بدست می‌آید.

در اینجا معادلات سینماتیک را به منظور جداسازی مشتقات دوم متغیرهای مفصل q و متغیرهای تغییر فرم δ از عبارتهای مربوط به $\ddot{W}_i, \ddot{\hat{W}}_i$ بسط می‌دهیم. با این کار می‌توان ماتریسهای یـاد شـده را به صورت بازگشتی محاسبه نمود. ابتدا حاصلضرب تبدیلهایی که $\hat{W}_i$ را به روش متفاوت بوجود می‌آورد در نظرمی‌گیریم.

$$\hat{W}_i = A_1 E_1 A_2 E_2 ....A_h E_h ....A_i E_i$$
$$= \hat{W}_{h-1} A_h \, {}^h\overline{W}_i = W_h E_h \, {}^h\hat{W}_i \tag{1-98}$$

با دو بار مشتق گرفتن از روابط فوق می‌توانیم به عبارت زیر برسیم:

$$\ddot{\hat{W}}_i = \sum_{h=1}^{i} \left(\hat{W}_{h-1} U_h \, {}^h\overline{W}_i \ddot{q}_h + \sum_{k=1}^{m_h} W_h M_{hk} \, {}^h\hat{W}_i \ddot{\delta}_{hk} \right) + \ddot{\hat{W}}_{Vi} \tag{1-99}$$

و همچنین با روشی مشابه برای W_i:

$$W_i = A_1 E_1 A_2 E_2 ....A_h E_h ....E_{i-1} A_i$$
$$= \hat{W}_{h-1} A_h \, {}^h\widetilde{W}_i = W_h E_h \, {}^h W_i \tag{1-100}$$

و با تکرار عملیات بالا برای $\ddot{W}_i$ می‌توانیم عبارت زیر را به دست آوریم.

$$\ddot{W}_i = \sum_{h=1}^{i} \hat{W}_{h-1} U_h \, {}^h\widetilde{W}_i \ddot{q}_h + \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{m_h} W_h M_{hk} \, {}^h W_i \ddot{\delta}_{hk} + \ddot{W}_{Vi} \tag{1-101}$$

مقادیر $\ddot{W}_{Vi}, \ddot{\hat{W}}_{Vi}$ بصورت برگشتی می‌توانند محاسبه شوند. همانطور که در معادله‌های محاسبه $\ddot{W}_j, \ddot{\hat{W}}_j$ اشاره کردیم به ترتیب (برای $\ddot{W}_i, \ddot{\hat{W}}_i$) فقط با حذف جمله‌هایی که شامل $\ddot{\delta}_{jk}, \ddot{q}_j$ هستند نتیجه می‌شود:

$$\ddot{W}_{Vj} = \ddot{\hat{W}}_{V,j-1} A_j + 2\dot{\hat{W}}_{j-1} \dot{A}_j + \hat{W}_{j-1} U_{2j} \dot{q}_j^2$$
$$\ddot{\hat{W}}_{Vj} = \ddot{W}_{Vj} E_j + 2\dot{W}_j \dot{E}_j \tag{1-102}$$

برای بدست آوردن ضرایب ماتریس اینرسی که در مشقات دوم ضرب می‌شود، معادله‌های بدست آمده را جایگزین در روابط بدست آمده برای $\ddot{W}_i, \ddot{\hat{W}}_i$ $\frac{\partial K}{\partial \ddot{\delta}_{jf}}, \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_j}$ خواهیم کرد.

برای بدست آوردن ضرایب اینرسی متغیرهای مفصل در معادله‌های مفصل به این مورد توجه می کنیم که تمام مواردی که $\ddot{q}_j$ در رابطه $\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_j}$ وجود دارد، در عبارت $\ddot{W}_i^T$ قرار دارد. وقتی این جملات جدا می‌شوند یک تابع مجموع دوتایی با شاخصهای i و h بوجود می‌آید. تعویض ترتیب این تابع مجموع بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=j}^{n} \sum_{h=1}^{i} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=\max(h,j)}^{n} \tag{1-103}$$

ضریب نتیجه شده برای متغیر مفصل q_h در معادله مفصل j عبارت است از:

$$J_{jh} = 2\,Tr\left\{ \hat{W}_{j-1}\,U_j\ {}^j\widetilde{F}_h\,U_h^T\ \hat{W}_{h-1}^T \right\} \tag{1-104}$$

بطوریکه برای:

$${}^j\widetilde{F}_h = \sum_{i=\max(h,j)}^{n} {}^j\widetilde{W}_i\,G_i\,{}^h\widetilde{W}_i^T \tag{1-105}$$

توجه شود که اگر جای j و h و ترانسپوزهای داخل عملگر Trace را عوض کنیم. عبارت یکسانی بدست می آید. این موضوع تقارن ماتریس اینرسی را ثابت می‌کند، که برای کاهش نیازهای محاسباتی مورد استفاده واقع می‌شود.

برای بدست آوردن ضرایب اینرسی متغیرهای تغییر شکل در معادلات مفصل به این مورد توجه می کنیم که متغیرهای تغییر فرم دوبار در عبارات ظاهر می‌شوند، یکی در $\ddot{W}_i^T$ و دیگری بصورت صریح در معادله مفصل، بعد از جاگذاری $\ddot{W}_i^T$ در معادله مفصل جملات $\ddot{\delta}_{jf}$ را انتخاب می‌کنیم و ترتیب تابع مجموع را به صورت زیر عوض می‌کنیم.

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{h=1}^{i-1} = \sum_{h=1}^{n-1}\ \sum_{i=\max(h+1,j)}^{n} \tag{1-106}$$

ضریب منتج شده در معادله مفصل j عبارت است از J_{jhk} که جملات شامل بستگی به ارزشهای مقادیر مربوطه به j و h دارد. برای $1 \le k \le m_h$ داریم:

$$h = n,\ j = 1,\dots\dots,\ n\ ,\quad k = 1,\dots,\ m_n$$

برای $J_{jhk} = J_{jnk} = 2\,Tr\left\{ \hat{W}_{j-1}\,U_j\ {}^j\widetilde{W}_n\ D_{nk}\ W_n^T \right\}$

$$h = j,\dots\dots,n-1,\ j = 1,\dots\dots,n-1\ ,\quad k = 1,\dots m_h$$

برای $J_{jhk} = 2\,Tr\left\{ \left(\hat{W}_{j-1}\,U_j\right)\left[{}^jF_h\,M_{hk}^T + {}^j\widetilde{W}_h\,D_{hk} \right] W_h^T \right\}$ (1-107)

$$h = 1,\dots\dots,\ j-1,\ j = 2,\dots\dots,\ n\ ,\ k = 1,\dots\dots,\ m_h$$

برای $J_{jhk} = 2\,Tr\left\{ \left(\hat{W}_{j-1}\,U_j\right)\ {}^jF_h\ M_{hk}^T\ W_h^T \right\}$

بطوریکه برای $h = 1,\dots\dots,n-1$ و $j = 1,\dots\dots,n$:

$${}^jF_h = \sum_{i=\max(h+1,j)}^{n} {}^j\widetilde{W}_i\,G_i\,{}^hW_i^T \tag{1-108}$$

می‌توان نشان داد که ضریب اینرسی برای متغیر تغییر شکل δ_{hk} در معادله مفصل j برابر ضریب برای متغیر مفصل q_j در معادله تغییر فرم $k,\ h$ می‌باشد. این موضوع تقارن ماتریس اینرسی را نشان می‌دهد و محاسبات مورد نیاز را کاهش می‌دهد.

برای بدست آوردن ضرایب اینرسی متغیرهای تغییر شکل در معادله تغییر فرم توجه داریم که دراینجا نیز می‌توانیم تقارن ضرایب را نشان دهیم، یعنی ضریب متغیر $h,\ k$ در معادله $j\ ,\ f$ برابر ضریب متغیر $j\ ,\ f$ در معادله h, k می‌باشد. جاگذاری مقدار بدست آمده برای $\ddot{W}_i$ در رابطه بدست آمده برای $\frac{\partial K}{\partial \ddot{\delta}_{jf}}$ و جداسازی مشتقات مرتبه دوم متغیرهای تغییر فرم و تعویض ترتیب تابع‌های مجموع ما را قادر به تعیین ضرایب اینرسی می‌کند. برای خلاصه سازی بیشتر با استفاده از این اصل که، برای هر سه ماتریس مربعی C, B, A داریم:

$$Tr\{ABC\} = Tr\{CAB\} = Tr\{BCA\} \qquad (1\text{-}109)$$

علاوه بر این ماتریسهای دوران در ماتریسهای تبدیل تعامد هستند، بنابراین $R_i\ R_i^T = I$ که I یک ماتریس 3×3 واحد است.

برای $1 \le f \le m_j, 1 \le k \le m_h$ داریم:

برای
$$j = h = n\ ;\ f = 1,\ldots m_j\ ;\ k = 1,\ldots m_n$$
$$I_{nfnk} = 2Tr\{C_{nkf}\}$$

برای
$$j = h = 1,\ldots\ldots,n-1\ ;\ f = 1,\ldots\ldots,m_j\ ;\ h = 1,\ldots\ldots,m_n$$
$$I_{jfjk} = 2Tr\{M_{jf}\ {}^j\Phi_h\ M_{jk}^T + C_{jkf}\}$$

$$(1\text{-}110)$$

برای
$$h = n; j = 1,\ldots\ldots,n-1\ ;\ ;\ f = 1,\ldots\ldots,m_j\ ;\ h = 1,\ldots\ldots,m_h$$
$$I_{jfnk} = 2Tr\{W_j\, M_{jf}\ {}^jW_n\, D_{nk}\, W_n^T\}$$

برای
$$j = 1,\ldots\ldots\ \ldots,\ n-2\ ;\ h = j+1,\ldots\ldots,\ n-1\ ;$$
$$f = 1,\ldots\ldots,\ m_j\ ;\ h = 1,\ldots\ldots,\ m_n$$
$$I_{jfhk} = 2\,Tr\left\{W_j\ M_{jf}\left[{}^j\Phi_h\ M_{hk}^T + {}^jW_h\ D_{hk}\right]W_h^T\right\}$$

در روابط بالا برای $j = 1,\ldots\ldots,n-1\ ,\ h = 1,\ldots\ldots,n-1$:

$${}^j\Phi_h = \sum_{i=\max(j+1,h+1)}^{n} {}^jW_i\, G_i\ {}^hW_i^T \qquad (1\text{-}111)$$

اکنون به بررسی روابط بازگشتی در محاسبه ضرایب اینرسی می پردازیم. تا زمانی که ماتریس اینرسی یک ماتریس مربعی است برای محاسبه به n_t^2 جمله نیاز دارد که n_t تعداد کل متغیرها می‌باشد.

$$n_t = n + \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{1-112}$$

با استفاده از این واقعیت که ماتریس متقارن است، تعداد جملات مجزا از هم (مستقل) به $\frac{n_t(n_t+1)}{2}$ می‌رسد، که هنوز تابعی درجه دوم است، بنابراین هنگامی که پیچیدگی محاسباتی دینامیک معکوس بتواند در n_t متغیر شبیه سازی خطی شود، ماتریس اینرسی پیچیدگی وابسته به n_t^2 را طلب می‌کند. بنابراین n_t می‌تواند برای بازوهای عملی و کاربردی بسیار بزرگ باشد. بسیار مهم است که ضریب جمله مربعی تا آنجا که می‌تواند کاهش داده شود.

بایستی به این مسئله بیشتر توجه کرد که به علت کوتاهی یا حتی صفر بودن طول بعضی لینکها می‌توان آنها را ضرورتاً صلب در نظر گرفت. برای مثال بازوهای شکل انسانی دو لینک دارند که بسیار بزرگتر از دیگریها هستند، و منجر به تسلط بیشتری می‌شوند. بنابراین این امکان وجود دارد که بسیاری از جملات استخراج شده در بالا برای این لینکها مورد نیاز نباشد. محاسبه ${}^j\Phi_h, {}^jF_h, {}^j\tilde{F}_h$ را در نظر بگیرید. چندین الگوی بازگشتی بایستی برای محاسبات کارآمد این کمیتها آرایش داده شوند. معادله ${}^jF_h$ فقط اگر لینک مطابق با متغیر لینک h انعطاف پذیر باشد مورد نیاز است.

(یعنی $m_h > 0$) و معادله ${}^j\Phi_h$ فقط زمانی که هر دو لینک متغیر و لینک معادله لینک j انعطاف پذیر باشد مورد نیاز خواهد بود. بنابراین الگوهای بازگشتی زیر برای محاسبه ${}^j\Phi_h, {}^jF_h, {}^j\tilde{F}_h$ طرح می‌شود.

برای $1 \le f \le m_j, 1 \le k \le m_h$

مقدار دهی اولیه:

و: $j = h = n \qquad {}^n\tilde{F}_n = G_n$

$$\begin{aligned}
&\text{برای } h > j \le n && {}^j\tilde{F}_h = E_j\, A_{j+1}\ {}^{j+1}\tilde{F}_h \\
&\text{برای } j = h && {}^h\tilde{F}_h = G_h + {}^h\tilde{F}_{h+1}\left(E_j\, A_{j+1}\right)^T \\
&\text{اگر } m_h > 0 && {}^jF_h = {}^j\tilde{F}_{h+1}\, A_{h+1}^T \\
&\text{اگر } m_h > 0, m_j > 0 && {}^j\Phi_h = A_{j+1}\ {}^j\tilde{F}_h\ A_{h+1}^T
\end{aligned} \tag{1-113}$$

بنابراین برای رسیدن به هدف این فصل معادلات به صورت کامل در شکل زیر نظر گرفته می‌شود:

$$J\ddot{Z}=R \qquad (1\text{–}114)$$

J = ماتریس اینرسی, مرکب از ضرایبی که در قبل تعریف شده، بصورتی منظم برای ضـرب کـردن در $\ddot{Z}$

$\ddot{Z}$ = بردار مختصاتهای تعمیم یافته که عبارت است از

$$Z=\left[q_1\ \delta_{11}\ \delta_{12}\ \ldots\ldots\delta_{1m_1}\ \ q_2\ \delta_{21}\ \ldots\ldots\delta_{2m_2}\ \ \ldots\ldots q_h\ \delta_{h1}\ \ldots\ldots\delta_{hm_h}\ \ldots\ldots\delta_{nm_n}\right]^T \qquad (1\text{–}115)$$

q_h : متغیر مفصل برای فصل h ام

δ_{hk}: متغیر تغییر فرم (دامنه) مود k ام از لینک h ام

R : برداری که شامل جملات دینامیکی باقی مانده و نیروهای خارجی است که می‌تـوان بـه صـورت زیر آن را نشان داد.

$$R=\left[R_1\ R_{11}\ R_{12}\ldots\ldots R_{1m_1}\ \ R_2\ R_{21}\ldots\ldots R_{2m_2}\ \ldots\ldots R_j\ R_{j1}\ \ldots\ldots R_{jf}\ldots\ldots R_{jm_j}\ \ldots\ldots R_{nm_n}\right]^T \qquad (1\text{–}116)$$

R_j : جملات مربوط به وجوه دینامیک از معادله مفصل j (معادلـه دینـامیکی مفـصل) کـه بـا خـارج کردن مشتق مرتبه دوم مختصاتهای تعمیم یافته بدست می آید.

R_{jf} : جملات مربوط به وجوه دینامیک که از معادله تغییر فرم jf (معادله دینامیکی تغییرشکل) کـه با خارج کردن مشتق مرتبه دوم مختصاتهای تعمیم یافته بدست می‌آید.

روابط مربوط به محاسبه عناصر بردار R و روابط بازگشتی مربوط بـه آنهـا در زیـر آورده شـده است.

$$R_j=-2Tr\left\{\hat{W}_{j-1}\,U_j\,Q_j\right\}+g^T\,\hat{W}_{j-1}\,U_j\,P_j+F_j$$

$$R_1=-2Tr\left\{U_1\,Q_1\right\}+g^T\,U_1\,P_1+F_1$$

$$R_{jf}=-2Tr\left\{W_j\,M_{jf}\,A_{j+1}\,Q_{j+1}+\left[\ddot{W}_{Vj}\,D_{jf}+2\dot{W}_j\sum_{k=1}^{m_j}\dot{\delta}_{jk}\,C_{jkf}\right]W_j^T\right\} \qquad (1\text{–}117)$$

$$-\sum_{k=1}^{m_j}\delta_{jk}\,k_{jkf}+g^T\,W_j\,M_{jf}\,A_{j+1}\,P_{j+1}+g^T\,W_j\in_{jf}$$

$$R_{nf}=-2Tr\left\{\left[\ddot{W}_{Vn}\,D_{nf}+2\dot{W}_n\sum_{k=1}^{m_n}\dot{\delta}_{nk}\,C_{nkf}\right]W_n^T\right\}-\sum_{k=1}^{m_n}\delta_{nk}\,k_{nkf}+g^T\,W_n\in_{nf} \qquad (1\text{–}118)$$

بطوریکه در آنها:

$$Q_n = G_n\, \ddot{W}_{Vn}^T + 2\left(\sum_{k=1}^{m_n} \dot{\delta}_{nk}\, D_{nk}\right) \dot{W}_n^T$$

$$P_n = M_n\, r_{r_n} + \sum_{k=1}^{m_n} \delta_{nk} \in_{nk} = r_n \qquad (1-119)$$

$$Q_j = G_j\, \ddot{W}_{Vj}^T + 2\left(\sum_{k=1}^{m_j} \dot{\delta}_{jk}\, D_{jk}\right) \dot{W}_j^T + E_j\, A_{j+1}\, Q_{j+1}$$

$$P_j = M_j\, r_{r_j} + \sum_{k=1}^{m_j} \delta_{jk} \in_{jk} + E_j\, A_{j+1}\, P_{j+1}$$

1-7 توابع خاص

جوابهای بعضی از معادلات دیفرانسیل مهم درریاضیات کاربردی توابعی هستند که غالبا مقدماتی نبوده با سری همگرا می باشند و در حالتهای خاص جوابهای چند جمله ایی هستند که دارای خواص جالبی می باشند که از مهمترین آنها خاصیت تعامدی این جمله ایها است ، به این گونه توابع « توابع خاص » می نامیم . در این فصل به بررسی این گونه توابع می پردازیم .

1-7-1 معادله لژاندر

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + p(p+1)\, y = 0 \qquad (1-120)$$

که در آن P یک عدد حقیقی است را معادله لژاندر می نامیم . نقطه $x = o$ ، یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (1-121) می باشد ، بنابراین دارای جوابی به صورت زیر می باشد .

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1-121)$$

برای بدست آوردن حداقل شعاع همگرائی سری فوق از معادله(1-120)داریم

$$|x| < 1 \qquad p(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2x(1 + x^2 + x^3 + \ldots.) = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

$$(1-122)$$

$$|x| < 1 \qquad Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2} = p(p+1)(1 + x^2 + x^3 + \ldots) = p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

پس شعاع همگرایی سری (1-121) حداقل برابر 1 می باشد. با بدست آوردن y'', y' از روی y و جایگذاری در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$a_{n+2} = \frac{-(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad n = 0,1,2,... \qquad (1-123)$$

که از آن داریم

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2} a_0$$
$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2.3} a_1$$
$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+2)}{3.4} a_2 = \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} a_0$$

که به این ترتیب y_1, y_2 به صورت زیربدست می آید

$$y_1(x) = 1 - \frac{p(p+1)}{2} x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} x^4 - ....(IV)$$
$$y_2(x) = x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!} x^5 - ....$$

برای محاسبه شعاع همگرائی سریهای فوق داریم .

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 \qquad (1-124)$$

نتیجه هر دو سری برای $|x| < 1$ همگرا هستند .

1-7-2 چند جمله ایهای لژاندر

اگر در معادله لژاندر (1-120) ، عدد p صحیح و نامنفی باشد و قرار دهیم $p = m$ آنگاه مطابق فرمول بازگشتی (1-123) داریم .

$$a_{n+2} = \frac{-(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad n = o ، 1، 2 ، ..... \qquad (1-125)$$

که به ازای n= m از رابطه ی فوق داریم $a_{n+2} = 0$ بنابراین

$$a_{m+4} = a_{m+6} = ... = 0 \qquad (1-126)$$

m زوج باشدجواب $y_1(x)$ یک چند جکله ای درجه m است و اگر m فرد باشد، جواب $y_2(x)$ یک چند جمله ای درجه m می باشد . ضرائب چند جمله ای ها را بر حسب a_m یعنی ضریب جمله با بیشترین توان می توان بدست آورد. a_m را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$a_m = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \qquad m=0,1,2,\dots \qquad (1\text{-}127)$$

a_m را بفرم فوق انتخاب کرده ایم زیرا تمام چند جمله ای های لژاندر که به ایـن ترتیـب بدسـت مـی آیند ، مقدارشان به ازای $x = 1$ برابر 1 می باشد .

از رابطه ی (126-1) داریم

$$a_n = -\frac{(n+1)(n+2)}{(m-n)(m+n+1)} a_{n+2} \qquad (1\text{-}128)$$

با جایگذاری $n = m - 2$ در رابطه (128-1) خواهیم داشت .

$$a_{m-2} = -\frac{m(m-1)}{2(2m-1)} a_m = \frac{-m(m-1)}{2(2m-1)} \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} = -\frac{(2m-2)!}{2^m (m-1)!(m-2)!} \qquad (1\text{-}129)$$

و بطور کلی خواهیم داشت

$$a_{m-2k} = \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!} \qquad (1\text{-}130)$$

چند جمله ای لژاندر از درجه m را با $P_m(x)$ نشان داده و بفرم زیر تعریف می کنیم .

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{2^m k!(m-k)!(m-2k)!} x^{m-2k} \qquad m=0,1,2,\dots \qquad (1\text{-}131)$$

که با فرض $M = \frac{m}{2}$ یا $M = \frac{m-1}{2}$ هر یک که صحیح باشد از (131-1) نتیجه می گیریم:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad (1\text{-}132)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

3-7-1 خواص چند جمله ای های لژاندر

1- مجموعه چند جمله ای های لژاندر در بازه (1 ، 1-) یک مجموعه متعامد می باشد.

یعنی :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \qquad m \neq n \qquad (1\text{-}133)$$
$$\int_{-1}^{1} \left[P_m(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2m+1} \qquad m = 0,1,2,..$$

2- چند جمله ای های لژاندر در فرمول بازگشتی زیر صدق می کند

$$(m+1)P_{m+1}(x)=(2m+1)xP_m(x)-mP_{m-1}(x) \qquad m=1,2,.. \qquad (1-134)$$

که از فرمول فوق با داشتن $P_0(x)=1, P_1(x)=x$ چند جمله ای های لژاندر را مـی تـوان بدسـت آورد .

3- می توان نشان داد که

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m\right] \qquad m=0,1,2,... \qquad (1-135)$$

فرمول فوق را « فرمول رودریک » می نامیم . از فرمول فوق نیز مـی تـوان چنـد جملـه ای لژانـدر را بدست آورد .

1-7-4 معادله هرمیت

معادله ی دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y''-2xy'+2py=0 \qquad (1-136)$$

را که در آن p یک مقدار ثابت می باشد را « معادلـه هرمیـت » مـی نـامیم . از مـشاهده معادلـه فـوق نتیجه می گیریم که x = o یک نقطه عادی معادله (1-136)) می باشد پس دارای جوابی به فرم زیـر است .

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (1-137)$$

که به ازای هر x همگرا ست .

با بدست آوردن y', y'' از روی y و جایگذاری آنها در معادله (1-137) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-2na_n+2pa_n\right]x^n=0 \qquad (1-138)$$

که از آن فرمول بازگشتی زیر بدست می آید

$$a_{n+2}=\frac{-(2p-2n)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad n=0,1,2,... \qquad (1-139)$$

از روی فرمول بازگشتی فوق داریم

$$a_2=-pa_0 \qquad (1-140)$$
$$a_3=\frac{-(2p-2)}{2.3}a_1=-\frac{2(p-1)}{3!}a_1$$

و به طور کلی

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{2^n p(p-2)....(p-2n+2)}{(2n)!} \qquad (1-141)$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-3)....(p-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$$

و جوابهای معادله (1-137) بصورت زیر بدست می آید .

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n p(p-2)....(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n}$$
$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-2)....(p-2n+1)}{(2n+1)!} \qquad (1-142)$$

سریهای فوق به ازای هر x همگرا می باشند .

1-7-5 چند جمله ای های هرمیت .

اگر در معادله یا دیفرانسیل (1-138) p عددی صحیح و نامنفی باشد و قرار دهید p= m . در این صورت یکی از جوابهای (1-142) چند جمله ای از درجه m است .

این چند جمله ای وقتی که در ضریب مناسبی ضرب شود و به طوریکه ضریب x^m برابر 2^m شود «چند جمله ای هرمیت درجه m » می نامیم و آنرا با $H_m(x)$ نشان می دهیم .

مانند چند جمله ای های لژاندر می توان نشان داد

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m!(2x)^{m-2k}}{k!(m-2k)!} \qquad (1-143)$$

که اگر $M = \frac{m}{2}$ یا $M = \frac{m-1}{2}$ صحیح باشند داریم

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^3 - 2 \qquad (1-144)$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

چند جمله ای های هرمیت در مکانیک کوانتومی در مطالعه جوابهای « معادله شرودنیگر » دارای اهمیت زیادی می باشد .

1-7-6 تابع گاما

تابع گاما را که با $\Gamma(\alpha)$ نشان می دهیم برای مقادیر $\alpha > 0$ بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad (1-145)$$

می توان نشان داد که انتگرال (1-145) برا ی مقادیر $\alpha > 0$ همگراست یعنی حد زیر موجود است .

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

و برای مقادیر $x \le 0$ انتگرال (1-145) واگراست یعنی حد فوق موجود نیست. حال ثابت می کنیم

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad (1\text{-}146)$$

بدین منظور می نویسیم :

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \lim_{\alpha\to\infty} (-x^{\alpha} e^{-x})\Big|_0^{\alpha} + \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\int_0^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

حال اگر a= n که عددی n عددی طبیعی می باشد آنگاه مطابق فرمول (1-146) داریم

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n(n-1)......2\Gamma(1)$$

از طرفی

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{\alpha\to\infty} - e^{-x}\Big|_0^{\alpha} = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (1\text{-}147)$$

حال به کمک تابع $\alpha!, \Gamma(\alpha)$ را بصورت زیر برای مقادیر $\alpha > 0$ تعریف می کنیم .

$$\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$$

با تغییر متغیر $x = X^2$ و با استفاده از معادله (1-145) می توان نشان داد که

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (1\text{-}148)$$

برای اثبات آن بصورت زیر عمل می کنیم .

$$I = \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-X^2} dX \qquad (1\text{-}149)$$

آنگاه

$$I^2 = \left(2\int_0^{\infty} e^{-X^2} dX\right)\left(2\int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY\right) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(X^2+Y^2)} dXdY \qquad (1\text{-}150)$$

که با تغییر متغیر در مختصات قطبی r, θ داریم

$$I^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} d\theta$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

پس

$$I^2 = \pi$$

در نتیجه

$$I = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

1-7-7 معادله بسل

معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (1-152)$$

که در آن $p \geq 0$ ، معادله بسل مرتبه p نامیده می شود . از روش فروبینیوس برای حل معادله بسل استفاده می کنیم . همانطور که از صورت معادله (151-1) مشاهده می گردد نقطه x= o یک نقطه تکین منظم برای معادله مذکور است. جواب های معادله (151-1) را بر $x > 0$ بدست می آوریم . ابتدا معادله شاخص را تشکیل می دهیم .

$$r^2 - p^2 = 0 \qquad (1-152)$$

که دارای دو ریشه $r = p$ و $r = -p$ می باشد ، به این ترتیب یک جواب معادله بسل بصورت زیر بدست می آید .

$$a_0 \neq 0 \qquad y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1-153)$$

جواب مستقل خطی $y_2(x)$ با $y_1(x)$ ، بستگی به مقدار $r_1 - r_2 = 2p$ دارد. سه حالت در نظر می گیریم :

i) اگر 2p عددی صحیح نباشد ، آنگاه

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ii) اگر $2p = 0$ آنگاه

$$y_2(x) = y_1(x) Lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

iii) اگر 2p عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه

$$y_2(x) = Cy_1(x) Lnx + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

حال به محاسبه ضرایب در(153-1) می پردازیم، داریم

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}$$

با محاسبه مشتقات $y_1(x)$ و جایگذاری آنها در (I) خواهیم داشت

$$a_1(1+2p)x^{p+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n^2 + 2np)a_n + a_{n-2} \right] x^{n+p} = 0 \qquad (1-154)$$

که از آن داریم

$$n = 2,3,\ldots \qquad a_n = -\frac{1}{n(2p+n)} a_{n-2} \qquad a_1(1+2p) = 0 \qquad (1\text{-}155)$$

چون $p \ge 0$ پس $a_1 = 0$ بنابراین از فرمول بازگشتی فوق داریم

$$a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2p+2)} = \frac{-a_0}{2.2(p+1)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4(2p+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(p+1)(p+2)}$$

و در حالت کلی

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)} \qquad (1\text{-}156)$$

پس جواب $y_1(x)$ بصورت زیر در می آید.

$$a_0 \neq 0 \qquad y_1(x) = a_0 x^p \sum \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)} \qquad (1\text{-}157)$$

شعاع همگرایی سری فوق $R = \infty$ بوده و جواب فوق برای $x > 0$ برقرار است.

تعریف 7-1– تابع بسل نوع اول مرتبه P را با $J_p(x)$ نشان داده و با انتخاب

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} = \frac{1}{2^p p!} \qquad (1\text{-}158)$$

بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-p}}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}$$

که آنرا بفرم زیر می نویسیم.

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad (1\text{-}159)$$

برای بدست آوردن جواب دیگر معادله بسل به ازای $r = -p$ در معادله (II) به جای $p,-p$ قرار داده و با مشتق گرفتن از آن و با جایگذاری در (1-159) و طی مراحلی مشابه حالت قبل به جواب زیر می رسیم.

$$y_2(x) = a_0 x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\ldots(-p+n)}$$

که با انتخاب $a_0 = \dfrac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$ جواب فوق بصورت زیر در می آید.

$$y_2(x) = J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \qquad (1-160)$$

که سری فوق برای $x > 0$ همگراست.ضمنا وقتی که $x \to 0$ آنگاه $J_{-p}(x) \to \infty$

تعریف 7-2: هر جواب معادله بسل که با جواب $J_p(x)$ در (III)بر بازه $x > 0$ مستقل خطی باشد تابع بسل نوع دوم مرتبه p نامیده می شود و آنرا با $Y_p(x)$ نشان می دهیم. بنابراین جواب عمومی معادله بسل را بفرم زیر می نویسیم.

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x) \qquad (1-161)$$

به ازای p=0 از (III) تابع بسل مرتبه صفر بدست می آید.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n} = 1 - (\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{(2!)^2} (\frac{x}{2})^4 - .... \qquad (1-162)$$

همچنین به ازای p=1 تابع بسل زیر بدست می آید.

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} (\frac{x}{2})^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}(\frac{x}{2})^3 + \frac{1}{2!3!}(\frac{x}{2})^5 - ..... \qquad (1-163)$$

مثال 11-1: جواب عمومی معادله بسل زیر را بدست آورید.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 0$$

حل: معادله فوق، معادله بسل مرتبه $p = \frac{1}{2}$ است پس $J_{\frac{1}{2}}(x)$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله بسل فوق خواهد بود. بنابراین جواب عمومی بصورت زیر است.

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

که با توجه به (III) خواهیم داشت

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1+\frac{1}{2})} (\frac{x}{2})^{2n+\frac{1}{2}} = (\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

از طرفی

$$\Gamma(n+\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2})\left[\frac{3}{2}\frac{5}{2}.....\frac{2n+1}{2}\right] = \Gamma(\frac{3}{2})\frac{3.5....(2n+1)}{2^n}$$

و همچنین می دانیم که $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ بنابراین

$$\Gamma(\frac{3}{2}+n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{3.5....(2n+1)}{2^n}\right]$$

با جایگذاری عبارت فوق در $J_{\frac{1}{2}}(x)$ و با توجه به اینکه

$$2^n n!(3)(5).....(2n+1) = (2)(3)(4)....(2n)(2n+1) = (2n+1)!$$

در نتیجه

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}Sinx$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}Cosx$$

پس جواب عمومی بصورت زیر در می آید:

$$y = (C_1 Sinx + C_2 Cosx)\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

1-7-8 خواص تابع بسل

$$i)\ {}^{d}\!/_{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x)$$
$$ii)\ {}^{d}\!/_{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p-1}(x)$$

تمرین 8-1

1- نشان دهید چند جمله ای های لژاندر در رابطه بازگشتی زیر صدق می کند.

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)$$

2- ثابت کنید مجموعه چند جمله ای لژاندر بر بازه(-1,1) یک مجموعه متعامد هستند.

$$m \neq n \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

1-8 تابع گرین

در حل معادلات دیفرانسیل همگن با استفاده از تبدیلهای فوریه و لاپلاس می‌توان معادلات را حل نمود. برای حل معادلات دیفرانسیل (معمولی و جزیی) غیر همگن می‌توان از یک تبدیل انتگرالی که توسط تابعی به نام تابع گرین تعریف می‌شود استفاده نمود. به عبارت دیگر اگر برای یک معادله دیفرانسیل غیر همگن تابع گرین آن را بدانیم به راحتی می‌توانیم آن معادله دیفرانسیل را با یک تبدیل انتگرالی حل نماییم. برای روشن شدن موضوع یک معادله دیفرانسیل را به صورت کلی زیر در نظر بگیرید:

$$L(x)u(x) = f(x) \tag{1-164}$$

در این رابطه L(x) اپراتور دیفرانسیلی خطی است که بر تابع u(x) عمل می‌کند و f(x) یک

تابع مشخص در طرف دوم معادله‌ی ناهمگن می‌باشد. بنابراین هدف یافتن u(x) است به طوری که در رابطه دیفرانسیلی (1-164) صدق کند. برای حل معادله (1-164) می‌توانیم بنویسیم :

$$u(x) = L^{-1}(x)\, f(x) \tag{1-165}$$

که L^{-1} معکوس انتگرالی برای اپراتور دیفرانسیلی L می‌باشد. می‌توان نتیجه گرفت:

$$L^{-1}L = LL^{-1} = I \tag{1-166}$$

که I اپراتور همانی[5] می‌باشد. اکنون اپراتور معکوس انتگرالی را به صورت معادله‌ی (1-166) تعریف می‌کنیم. همانند اپراتوری که در تبدیل لاپلاس به کار می‌رود این اپراتور نیز بیانگر ضرب و انتگرال گیری یک تابع هسته‌ای[6] در تابع اپراند[7] می‌باشد. در اپراتور تبدیل لاپلاس از تابع هسته‌ای $e^{-j\omega x}$ استفاده می شود و در اینجا $G(x;x')$ بعنوان تابع هسته‌ای استفاده شده است.

$$L^{-1}\{f\} = \int G(x;x')\, f(x')dx' \tag{1-167}$$

هسته‌ی $G(x;x')$ تابع گرین متناظر با اپراتور L نامیده می‌شود. دقت کنید که تابع $G(x;x')$ یک تابع از دو متغیر x و x' است. x' یک نقطه‌ی دلخواه روی دامنه‌ی تعریف تابع $u(x)$ است که انتگرال نسبت به آن گرفته می‌شود.

اکنون به رابطه‌ی 166-1 توجه کنید. اپراتور همانی I در این رابطه به صورت تابع دلتا[8] تعریف می‌گردد؛ زیرا همانطور که می‌دانیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\, f(x')\,dx' = f(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')\,dx' = 1 \tag{1-168}$$

با جایگزینی اپراتورها در رابطه‌ی (1-166) می‌توان نتیجه گرفت:

$$L(x)G(x;x') = \delta(x-x') \tag{1-169}$$

اکنون حل معادله (1-165) را می‌توان از رابطه‌ی (1-169) بدست آورد:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x')\, f(x')dx' \tag{1-170}$$

زیرا : $$Lu(x) = L\int_{-\infty}^{\infty} G(x;x')\, f(x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty} LG(x;x')\, f(x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\, f(x')dx' = f(x)$$

---

[5] Identity Operator
[6] Kernel Function
[7] Operand
[8] Delta Function

باید دقت کرد که تابع گرین در معادله‌ی (165-1) صدق نمی‌کند و جوابی از *u(x)* نیست، بلکه این تابع در معادله (168-1) صدق می‌کند. به طور کلی اگر معادله دیفرانسیلی (165-1) روی بازه‌ی [a,b] با شرایط مرزی:

$$Au(a)+Bu(b)=0$$

تعریف شده باشد و x' یک نقطه در این بازه باشد، تابع گرین آن دارای مشخصات زیر است :

1) تابع $G(x;x')$ در بازه‌های $a \le x < x'$ و $x' < x \le b$ جوابی از معادله $Lu(x)=0$ است.

2) $G(x;x')$ در شرط مرزی (8) صدق می‌کند یعنی $AG(a,x')+BG(b,x')=0$

3) $G(x;x')$ ، $G'(x;x')$ ، ... ، $G^{(n-2)}(x;x')$ روی [a,b] پیوسته‌اند.

4) $G^{(n-1)}(x;x')$ برروی تمام [a,b] پیوسته است مگر در $x=x'$ که در آنجا پرش $-1/a_0(x')$ دارد.

با توجه به اینکه برای صدق تابع *u(x)* در معادله $Lu(x)=0$ لازم است *u(x)* و مشتقات اول تا (*n-1*) ام آن بر بازه‌ی تعریف پیوسته باشند، تابع G در معادله‌ی همگن نیز صدق نمی‌کند (به مشخصه 1 دقت کنید).

تابع گرین برای بسیاری از اپراتورهای دیفرانسیلی کاربردی دارای تعبیرفیزیکی می‌باشد. برای مثال اپراتور لاپلاسین دو بعدی را مطابق معادله‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

تابع گرین برای این اپراتور با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$r=\sqrt{\left(x_1-x_1'\right)+\left(x_2-x_2'\right)} \qquad ,G(x;x')=-\frac{1}{2\pi}\ln r \qquad (1\text{–}171)$$

این تابع گرین پتانسیل را در نقطه‌ی x با توجه به منبع بار نقطه‌ای که در x' قرار دارد بیان می‌کند. چنانکه مشاهده می‌شود تابع گرین تنها به *فاصله* (تفاضل برداری) بین نقطه‌ی منبع و نقطه‌ی محل میدان بستگی دارد.

بعنوان یکی دیگر از تعبیرهای فیزیکی، تابع گرین برای مثال در تحلیل الاستیکی[9] بیانگر جابجایی نقطه‌ی x از جسم الاستیک در نتیجه اعمال واحد نیرو در نقطه x' است، و یا در انتقال حرارت تابع گرین دما را در نقطه x با توجه به منبع گرما در نقطه منبع x' بیان می‌کند.

1-8-1 تابع گرین در فضای بینهایت و در فضای محدود

[9] Elastostatics

در بررسی هایی که تا کنون انجام شد اشاره‌ای به شرایط مرزی در بدست آوردن تابع گرین نکردیم. اینگونه تحلیل هنگامی صحیح است که به دنبال یک جواب عمومی برای معادله (169-1) باشیم؛

$$L(x)G(x;x')=\delta(x-x')$$

جواب عمومی بدست آمده مستقل از هرگونه شرایط مرزی می‌باشد و به همین دلیل به آن تابع گرین در فضای بینهایت (بدون مرز)[10] گفته می‌شود. با این وجود می‌توانیم تابع گرین را برای شرایط واقعی در فضای محدود با اضافه کردن جواب خصوصی به آن در نظر بگیریم:

$$G(x;x')=G_0(x;x')+G_R(x;x') \tag{1-172}$$

که :

$$\begin{aligned} L(x)G_R(x;x')&=0 \\ L(x)G_0(x;x')&=\delta(x-x') \end{aligned} \tag{1-173}$$

G_0 پاسخ عمومی و G_R پاسخ خصوصی است. از آنجا که G_R یک پاسخ همگن است، شامل مقادیر ثابت خواهد بود که شرایط مرزی را برای مساله برآورده می‌سازند.

مثال1-12 معادله‌ی هلم هولتز را در شرایط سه بعدی در نظر بگیرید:

$$(\nabla^2+k^2)u=0$$

که در آن ∇^2 اپراتور لاپلاسین است: $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. می‌خواهیم تابع گرین عمومی را برای این معادله بدست آوریم. در این حالت با توجه به معادله (169-1)) داریم:

$$L(x)G(x;x')=\delta(x-x')$$

دقت کنید که تابع دلتا در اینجا سه بعدی است و از ضرب تابع دلتا برای هریک از بعد ها با هم تعریف می‌شود:

$$\delta(x-x')=\delta(x_1-x_1').\delta(x_2-x_2').\delta(x_3-x_3') \tag{1-174}$$

این تابع فقط در مبدا مختصات دارای مقدار یک و در بقیه نقاط فضا صفر است. برای بدست آوردن تابع گرین عمومی برای این مساله از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\mathbf{q})&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}u(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{qr}}\,d\mathbf{r} \\ u(\mathbf{r})&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{U}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{qr}}\,d\mathbf{q} \end{aligned} \tag{1-175}$$

که در آن هر یک از متغیرهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{q}$ بردارهای سه بعدی هستند.

$$L(x)=\nabla^2+k^2 \tag{1-176}$$

[10] Free Space Green's Function

با به کارگیری تبدیل مستقیم فوریه برای تابع گرین داریم:

$$-\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\hat{G}(\mathbf{q})+k^2\hat{G}(\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^3}\Rightarrow q^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2\Rightarrow\left(q^2-k^2\right)\hat{G}(\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(\mathbf{q})=\frac{1}{(2\pi)^3\left(q^2-k^2\right)} \tag{1-177}$$

برای بدست آوردن تابع گرین در حوزه زمان (فیزیکی) از تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌کنیم:

$$G(r)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jqr}}{\left(q^2-k^2\right)}dq \tag{1-178}$$

این یک انتگرال فوریه‌ی ایزوتروپیک[11] است که علاوه بر اندازه، به جهت $\mathbf{q}$ نیز بستگی دارد. برای بدست آوردن این انتگرال، بارتون[12] پاسخ عمومی انتگرال ایزوتروپیک فوریه را بصورت زیر ارائه داده است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{q})e^{j\mathbf{qr}}\,d\mathbf{q}=\frac{4\pi}{R}\int_{0}^{\infty} q.\,f(q)\sin(qR)\,dq \tag{1-179}$$

که در آن R اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}$ و q اندازه بردار $\mathbf{q}$ است. با استفاده از این رابطه خواهیم داشت:

$$G(\mathbf{r})=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{R}\int_{0}^{\infty}\frac{q}{\left(q^2-k^2\right)}\sin(qR)\,dq \tag{1-180}$$

با توجه به اینکه انتگراند یک تابع زوج است:

$$G(\mathbf{r})=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{2R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q}{\left(q^2-k^2\right)}\sin(qR)\,dq \tag{1-181}$$

اکنون با بسط $\sin(qR)$ داریم:

$$\sin(qR)=\frac{e^{iqR}-e^{-iqR}}{2i}\Rightarrow \tag{1-182}$$

$$G(r)=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{4iR}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{iqR}}{(q-k)(q+k)}dq-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{-iqR}}{(q-k)(q+k)}dq\right\}=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\frac{1}{4iR}\{I_1-I_2\}$$

انتگرالهای I_1 و I_2 را با استفاده از روش مانده‌ها می‌توان بدست آورد:

---

[11] Isotropic

[12] Barton, [*Elements of Green's Functions and Propagation, Oxford Science Press, 1989*]

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qe^{iqR}}{(q-k)(q+k)} dq = 2\pi i \sum_{\mathrm{Re}\, s\_\mathrm{Im}(q)>0} \frac{qe^{iqR}}{(q-k)(q+k)} = \pi i e^{ikR} \qquad , I_2 = -\pi i e^{ikR}$$

(1-183)

بنابراین تابع گرین بصورت زیر بدست می‌آید:

$$G(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4iR} \left\{ \pi i e^{ikR} + \pi i e^{ikR} \right\} = \frac{1}{4\pi R} e^{ikR} \qquad (1-184)$$